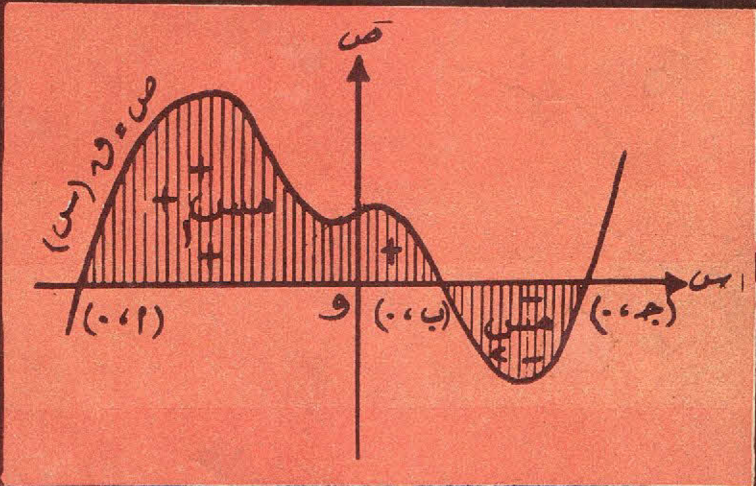
رحيم العزاوي
كامل موسى النصري

تمارين وأمثلة محلولة في

الرياضيات المعاصرة

وافقت مديرية الشؤون الفنية العامة على طبع هذا الكتاب في ١٩٧٦/٢/٢٤ تحت عدد ٧٢٩/٥٠/٤



يشتمل على :

٩٩٥ سؤالاً مع اجوبتها

٣١٥ مثالاً محلولاً

النظام الاحداثي للمستقيم

١ـ انتخب نظاما احداثيا لمستقيم وظلل كلا من المجموعات التاليـة :ـ

هـ١ = { س : س نقطة ، ق (س) ≥ ١ }

هـ٢ = { س : س نقطة ، ـ ٢ ≤ ق (س) ≤ ٣ }

هـ٣ = { س : س نقطة ، | ق (س) | ≤ ٢ }

هـ٤ = { س : س نقطة ، [ق (س)]٢ ≤ ٤ }

هـ٥ = { س : س نقطة ، [ق (س)]٢ ≥ ٤ }

هـ٦ = { س : س نقطة ، [ق (س)]٢ ـ ٧ [ق (س)] + ١٢ ≤ صفر }

هـ٧ = { س : س نقطة ، ـ ٢ ق (س) + ٤ < صفر }

هـ٨ = { س : س نقطة ، [ق (س)] < صفر }

هـ٩ = { س : س نقطة ، [ق (س)]٢ + ١ < ق (س) }

هـ١٠ = { س : س نقطة ، [ق (س)] [ق (س) + ٢] [ق (س) ـ ١] > صفر }

هـ١١ = { س : س نقطة ، ق (س) / (ق (س) + ١) < ٢ حيث ق (س) ≠ ـ ١ }

هـ٢ ∩ هـ٣ ، هـ٩ ∩ هـ١٠

٢ـ لتكن كل من حـ ، د ∈ المستقيم ل بحيث ق (حـ) = ـ ٢ ، ق (د) = ٧ بالنسبة للنظام الاحداثي للمستقيم ل • فجد المسافة بين حـ ، د

٣ـ بالنسبة للنظام الاحداثي ق • اذا كانت المسافة بين النقطتين م ، ن = ٥ وحدة فاذا كان ق (م) = ـ ٢ فجد ق (ن) حيث م ، ن ∈ المستقيم د

٤ـ بالنسبة للنظام الاحداثي ق • اذا كانت ق (ن) = ٧ ، ق (ل) = ـ ٥ • فجد ق (هـ) بحيث المسافة بين ل ، هـ تساوي المسافة بين هـ ، ن حيث ن ، هـ ، ل ∈ المستقيم د •

٥ـ بالنسبة للنظام الاحداثي ق • اذا كان ق (ن) = ـ ٢ ، ق (م) = ٧ • فجد ق (هـ) بحيث ان نسبة المسافة بين ن ، هـ الى المسافة بين هـ ، م = ٢/٣ ، حيث ن ، م ، هـ ∈ المستقيم د •

النظام الاحداثي للمستوى

١ـ اثبت ان النقاط (١ ، ٤) ، (٣ ، ـ ٢) ، (ـ ٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة ٠

٢ـ اذا كانت النقاط (ـ ٢ ، ـ ١٣) ، (صفر ، ـ ٥) ، (٣ ، ص) تقع على استقامة واحدة فجد قيمة ص ٠

٣ـ اذا كانت النقاط (٢ ، ـ ٣) ، (ـ ٦ ، ٥) ، (س ، ـ ٥) تقع على استقامة واحدة فجد قيمة س ٠

٤ـ اذا كانت النقاط (٣ ، ٧) ، (ـ ١ ، ١) ، (س ، ص) على استقامة واحدة فما هي العلاقة بين س ، ص ٠

٥ـ جد احداثي النقطة التي تنتمي الى المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (ـ ٤ ، ـ ٧) ٠

ميل ومعادلة المستقيم

ملاحظات

اولا ـ لكل مستقيم م توجد ثلاثة اعداد حقيقية أ ، ب ، حـ بحيث أ ، ب لايساويان معا صفرا وان م = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، أس + ب ص + حـ = ٠ }

وبعبارة اخرى :

ان معادلة كل مستقيم تكون بالصيغة أس + ب ص + حـ = صفر ، حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح وان أ ، ب لايساويان معا صفرا ٠ وكل معادلة بهذه الصورة تمثل خطا مستقيما ٠ وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة العامة لمستقيم ٠

ومن هذه المعادلة نلاحظ مايلي :ـ

١ـ عندما حـ = صفر فان هذه المعادلة تصبح أس + ب ص = صفر

وهي معادلة مستقيم مار بنقطة الاصل ٠

٢ـ عندما ب = صفر ، أ ≠ صفر ، حـ ≠ صفر فان المعادلة تصبح :ـ

أس + حـ = صفر

اى ان س = $\frac{-\text{حـ}}{\text{أ}}$ وهي تمثل معادلة مستقيم يوازى المحور الثاني

٣ـ عندما أ = صفر ، ب ≠ صفر ، حـ ≠ صفر فان المعادلة تصبح :ـ

ب ص + حـ = ٠

اى ص = $\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}$ وهي تمثل معادلة مستقيم يوازى المحور الاول ٠

٤ــ عندما أ = صفر ، ب ≠ صفر ، ح = صفر فان المعادلة تصبح :ــ
ب ص = صفر اى ص = صفر وهي معادلة المحور الاول .
٥ــ عندما ب = صفر ، أ ≠ صفر ، ح = صفر فان المعادلة تصبح :ــ
أ س = صفر اى س = صفر وهي معادلة المحور الثاني .
٦ــ عندما أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ، ح ≠ صفر فان المعادلة تصبح :ــ

$$\frac{\text{أ}}{-\text{ح}}\,\text{س} + \frac{\text{ب}}{-\text{ح}}\,\text{ص} = 1$$

اى

$$\frac{\text{س}}{\frac{-\text{ح}}{\text{أ}}} + \frac{\text{ص}}{\frac{-\text{ح}}{\text{ب}}} = 1$$

اى $\frac{\text{س}}{\text{المقطع السيني}} + \frac{\text{ص}}{\text{المقطع الصادى}} = 1$ معادلة مستقيم بدلالة المقطعين السيني والصادى

ثانيا ــ ميل المستقيم

١ــ ان المعادلة أ س + ب ص + ح = صفر حيث أ ، ب ، ح ∈ ح وان أ ، ب
لايساويان صفرا معا . هي المعادلة العامة لمستقيم .
من هذه المعادلة اذا كان ب ≠ صفر
فان ب ص = ــ أ س ــ ح

$$\text{ص} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{س} - \frac{\text{ح}}{\text{ب}}$$ بقسمة الطرفين على ب

$$\text{ص} = \text{ل س} + \text{ك} \quad \text{حيث} \quad \frac{-\text{أ}}{\text{ب}} = \text{ل} \in \text{ح} \;،\; \frac{-\text{ح}}{\text{ب}} = \text{ك} \in \text{ح}$$

يسمى ل ميل المستقيم ، ك هو المقطع الصادى
اما في حالة ب = صفر فان المستقيم يوازى المحور الثاني
وان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ في هذه الحالة ∉ ح لان لايوجد نظير بالنسبة لعملية الضرب للعدد
صفر في مجموعة الاعداد الحقيقية ولذلك فالكلام عن ميل المحور الثاني لامعنى له .
من هذا حصلنا على ان ميل المستقيم الذى لايوازى المحور الثاني اذا علمت معادلته =

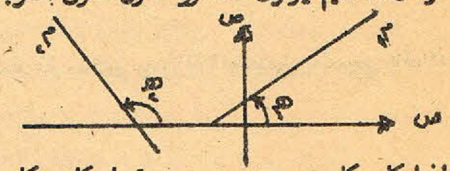
$$\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} \;،\; \text{ومقطعه الصادى} = \frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$$

وان المعادلة ص = ل س + ك هي المعادلة العامة لاى مستقيم لايوازى المحـــور
الثاني .

٢ـ ميل المستقيم غير الموازى للمحور الثاني والـذى يمر بالنقطتين (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) يساوى $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث س$_1$ $\neq$ س$_2$

٣ـ في حالة تعامد المحورين فان ميل المستقيم هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم مواز للمحور الاول .

ومن الجدير بالذكر انه اذا كان الميل موجبا فالزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول تكون حادة .
واذا كان الميل سالبا فالزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول تكون منفرجة .



ميل م$_1$ = ظا هـ$_1$
ميل م$_2$ = ظا هـ$_2$

٤ـ اذا كان كل من س ، ص مستقيما وكانت كل من أ ، ب ، حـ نقطة بحيث أ ، ب $\in$ س و ب ، حـ $\in$ ص وكان ميل س = ميل ص فان س = ص او ان النقاط أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة .

ثالثا :

ليكن م$_1$ المستقيم الذى معادلته أ$_1$س + ب$_1$ص + حـ$_1$ = ٠

وليكن م$_2$ المستقيم الذى معادلته أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ = ٠

حيث ان كلا من م$_1$ ، م$_2$ في المستوى الاقليدى ك .

١ـ م$_1$ $\cap$ م$_2$ = مجموعة احادية $\Longleftrightarrow$ أ$_1$ ب$_2$ ـ أ$_2$ ب$_1$ $\neq$ صفر

ولايجاد نقطة التقاطع نحل معادلتيهما آنيا .

م$_1$ $\cap$ م$_2$ = ϕ $\Longleftrightarrow$ م$_1$ // م$_2$ و م$_1$ $\neq$ م$_2$

٢ـ أوم$_1$ // م$_2$ و م$_1$ $\neq$ م$_2$ $\Longleftrightarrow$ (أ$_1$ ب$_2$ ـ أ$_2$ ب$_1$ = صفر)

و (أ$_1$ حـ$_2$ ـ أ$_2$ حـ$_1$ $\neq$ صفرا او ب$_1$ حـ$_2$ ـ ب$_2$ حـ$_1$ $\neq$ ٠)

اوم$_1$ // م$_2$ و م$_1$ $\neq$ م$_2$ $\Longleftrightarrow$ ميل م$_1$ = ميل م$_2$

، و حـ$_1$ $\neq$ حـ$_2$ ، حيث كل من م$_1$ ، م$_2$ لايوازى المحور الثاني

٣- $\text{م}_1 = \text{م}_2 \Longleftrightarrow \text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1 = \text{صفر}$ و ($\text{أ}_1 \text{حـ}_2 - \text{أ}_2 \text{حـ}_1 = \text{صفر}$

او $\text{ب}_1 \text{حـ}_2 - \text{ب}_2 \text{حـ}_1 = \text{صفر}$)

٤- $\text{م}_1 \perp \text{م}_2 \Longleftrightarrow \text{أ}_1 \text{أ}_2 + \text{ب}_1 \text{ب}_2 = \text{صفر}$

او $\text{م}_1 \perp \text{م}_2 \Longleftrightarrow \text{ميل م}_1 \times \text{ميل م}_2 = -1$ ، حيث كل من م_1 ، م_2 لايوازى المحور الثاني .

رابعا :

يكون الشكل الرباعي متوازى اضلاع اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين ، او اذا تناصف قطراه ، ويكون مستطيلا اذا كان متوازى اضلاع وحاصل ضرب ميلي ضلعين متجاورين فيه = -1 ، ويكون شبه منحرف اذا توازى ضلعان متقابلان فيه فقط .

خامسا ـ

اذا كانت هـ هي الزاوية بين مستقيمين ميلاهما ل_1 ، ل_2 فان

$$\text{طا هـ} = \frac{\text{ل}_2 - \text{ل}_1}{1 + \text{ل}_1 \text{ل}_2} \quad \text{اذا كان } \text{ل}_1 \cdot \text{ل}_2 \neq -1$$

اما اذا كان $\text{ل}_1 \cdot \text{ل}_2 = -1$ فان $\text{هـ} = 90^\circ$

تمارين ٤ – ١

(١) شفوى

١ – جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، ٥) ويوازى المحور الاول ٠

٢ – جد معادلة المستقيم المار بالنقطة(–٤ ، ٥) ويوازى المحور الثاني ٠

٣ – جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٣ ، ٠) ويوازى المستقيم ص= ٣ ٠

٤ – جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، – ٧) ويمر بنقطة الاصل ٠

٥ – جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ويوازى المستقيم ٧ اص+ ٢س –٥ = ٠

٦ – جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (٣ ، صفر)

٧ – جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (٠ ، – ٣)

٨ – جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (–٣ ، ٦) ، (–٣ ، – ٨)

٩ – جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (–٣ ، ٦) ، (٨ ، ٦)

١٠ – جد معادلة المستقيم المار من نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (– ٣ ، ٥) مع المستقيم المار بالنقطتين (– ٤ ، ٣) ، (– ٤ ، – ٧) ونقطة الاصل ٠

(٢) بين ايا من النقاط التالية $م_{١}$ (٣ ، ١) ، $م_{٢}$ (٢ ، ٣) ، $م_{٣}$ (٦ ، ٣) ، $م_{٤}$ (– ٣ ، – ٣) ، $م_{٥}$ (٣ ، – ١) ، $م_{٦}$ (–٢ ، ١) تقع على المستقيم الذى معادلته ٣ص – ٢س+ ٣ = ٠

الجواب : النقاط $م_{١}$ ، $م_{٣}$ ، $م_{٤}$ تقع على المستقيم المعلوم

(٣) النقاط $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ ، $ل_{٣}$ ، $ل_{٤}$ ، $ل_{٥}$ تقع على المستقيم الذى معادلته ٣ س – ٢ ص – ٦ = ٠ واحداثياتها على المحور الاول على التوالي ٤ ، ٢ ، ٠ ، – ٢ ، ٦ فجد احداثياتها على المحور الثاني ٠

الجواب : ٣ ، – ٣ ، ٠ ، – ٦ ، – ١٢

(٤) عين نقطتي تقاطع المستقيم ٢ س – ٣ص – ١٢ = ٠ مع المحورين وارسم هذا المستقيم ٠

الجواب : (٦ ، ٠) ، (٠ ، –٤)

(٥) معادلات اضلاع المثلث ب حـ ، أ ب ، أ حـ هي ٤ س + ٣ص – ٥ = ٠ ، س – ٣ص + ١٠ = ٠ ، س –٢ = ٠ ، عين احداثيات رؤوسه ٠

الجواب : أ (٢ ، – ١) ، ب (– ١ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٤) ٠

(٦) اكتب معادلة المستقيم الذى ميله ل ومقطعه الصادى ك كما يلي :–

(١) ل = $\frac{٢}{٣}$ ، ك = ٣　　　(٢) ل = ٣ ، ك = صفر

(٣) ل = صفر ، ك = – ٢　　　(٤) ل = – $\frac{٣}{٤}$ ، ك = ٣

(٥) ل = ـ ٢ ، ك = ـ ٥   (٦) ل = ـ $\frac{١}{٣}$ ، ك = $\frac{٢}{٣}$

وارسم المستقيم في كل حالة من الحالات اعلاه .

الاجوبة : (١) ٢س ـ ٣ص + ٩ = ٠ ، (٢) ٣س ـ ص = ٠ ،
(٣) ص + ٢ = ٠ ، (٤) ٣س + ٤ص ـ ١٢ = ٠ ، (٥) ٢س + ص + ٥ = ٠ ،
(٦) س + ٣ص ـ ٢ = ٠

(٧) احسب الميل ل والمقطع الصادى ك لكل من المستقيمات التالية :ـ
(١) ٥س ـ ص + ٣ = ٠ ، (٢) ٢س + ٣ص ـ ٦ = ٠ ، (٣) ٥س + ٣ص + ٢ = ٠ ، (٤) ٣س + ٢ص = ٠ (٥) ص ـ ٣ = ٠

الاجوبة : (١) ل = ٥ ، ك = ٣ ، (٢) ل = $\frac{-٢}{٣}$ ، ك = ٢ ، (٣) ل = $\frac{-٣}{٥}$ ،
ك = $\frac{-٢}{٣}$ ، (٤) ل = $\frac{-٢}{٣}$ ، ك = صفر ، (٥) ل = صفر ، ك = ٣

(٨) فيما يلي : احسب الميل ل للمستقيم المار بكل زوج من النقاط التالية :ـ
(١) (٢ ، ـ٥) ، (٣ ، ٢) (٢) (ـ٣ ، ١) ، (٧ ، ٨)
(٣) (٥ ، ـ٣) ، (ـ١ ، ٦)
الاجوبة ٧ ، $\frac{٧}{١٠}$ ، ـ $\frac{٣}{٢}$.

(٩) اكتب معادلات الخطوط المستقيمة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ والموازية للاضلاع المقابلة لها . اذا علمت ان رؤوس المثلث هي النقاط أ (٥ ، ـ٤) ،
ب (ـ١ ، ٣) ، حـ (ـ٣ ، ـ٢)
الاجوبة (١) ٥س ـ ٢ص ـ ٣٣ = ٠ ، (٢) س + ٤ص ـ ١١ = ٠ ،
(٣) ٧س + ٦ص + ٣٣ = ٠

(١٠) عين نقطتي تقاطع المستقيم المار بالنقطتين أ (ـ١ ، ٢) ، ب (٢ ، ٣) مع المحورين الاحداثيين .
الجواب (ـ٧ ، ٠) ، (٠ ، ٢ $\frac{١}{٣}$)

(١١) برهن ان معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) وينتمي الى منحى المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠ ، هي أ (س ـ $س_{١}$) + ب (ص ـ $ص_{١}$) = صفر

(١٢) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ـ٣) والذى ينتمي الى منحى المستقيم :
(١) ٣س ـ ٧ص + ٣ = ٠ (٢) س + ٩ص ـ ١١ = ٠
(٣) ١٦س ـ ٢٤ص ـ ٧ = ٠ (٤) ٢س + ٣ = ٠ ، (٥) ٣ص ـ ١ = ٠
تلميح / حل التمرين بالاستناد الى تمرين ١١ .

(١٣) عين قيم م ، واكتب معادلة المستقيم عندما يكون المستقيم :

(م + ٢) س + (م^2 – ٩) ص + ٢م^2 – ٨م + ٥ = ٠ ، حيث م ∋ ح

(١) موازيا للمحور الاول (٢) موازيا للمحور الثاني (٣) مارا بنقطة الاصل

الاجوبة (١) م = – ٢ ، ٥ص – ٣٣ = ٠ ، (٢) م = – ٣ ، س – ٥٦ = ٠

، $م_2$ = ٣ ، ٥س + ٨ = ٠ ، (٣) $م_1$ = ١ ، ٣س – ٨ص = ٠

، $م_2$ = $\frac{٥}{٣}$ ، ٣٣س – ٥٦ = ٠

(١٤) عين قيم م ، ن واكتب معادلة المستقيم عندما يكون المستقيم :

(م + ٢ن – ٣) س + (٢م – ن + ١) ص + ٦م + ٩ = ٠ حيث م

، ن ∋ ح

موازيا لمحور السينات ومقطعه الصادى = – ٣

الجواب / م = ٧ ، ن = –٢ ، ص + ٣ = صفر

(١٥) عين قيم م ، ن واكتب معادلة المستقيم عندما يكون المستقيم :

(٢م – ن + ٥) س + (م + ٣ن – ٢) ص + ٢م + ٧ن + ١٩ = صفر ،

حيث م ، ن ∋ ح موازيا لمحور الصادات ومقطعه السيني = ٥

الجواب : م = – ٤ ، ن = ٢ ، س – ٥ = صفر

(١٦) فيما يلي برهن تقاطع كل زوج من المستقيمات التالية وجد نقطة التقاطع .

(١) س + ٥ص – ٣٥ = ٠ ، ٣س + ٢ص – ٢٧ = ٠

(٢) ١٤س – ٩ص – ٢٤ = ٠ ، ٧س – ٢ص – ١٧ = صفر

(٣) ١٢س + ١٥ص – ٨ = ٠ ، ١٦س + ٩ص – ٧ = صفر

(٤) ٨س – ٢٢ص – ١٩ = ٠ ، ١٢س + ٥٥ص – ١٩ = ٠

(٥) ٣س + ٥ = صفر ، ص – ٢ = صفر

الاجوبة (٥ ، ٦) ، (٣ ، ٢) ، ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$) ، (٢ ، – $\frac{١}{١١}$) ، (– $\frac{٥}{٣}$ ، ٢)

(١٧) فيما يلي برهن تساوى كل زوج من المستقيمات التالية :–

(١) ٣س + ٥ص – ٤ = ٠ ، ٦س + ١٠ص – ٨ = ٠

(٢) س – $\sqrt{٢}$ ص = صفر ، $\sqrt{٢}$ س – ٢ص = صفر

(٣) $\sqrt{٣}$ س – ١ = صفر ، ٣س – $\sqrt{٣}$ = صفر

(١٨) جد قيمة كل من أ ، ب لكي يكون المستقيمان أس – ٢ص – ١ = ٠ ،

٦س – ٤ص – ب = صفر حيث أ ، ب ∋ ح

(١) متقاطعين (٢) متوازيين (٣) متساويين (٤) متعامدين

الاجوبة (١) أ ≠ ٣ (٢) أ = ٣ ، ب ≠ ٢ (٣) أ = ٣ ، ب = ٢

(١٩) جد قيمة كل من آ ، ب لكي يكون المستقيمان أ س + ٨ ص + ب = ٠ ،
٢ س + أ ص ــ ١ = ٠
(١) متوازيين وغير متساويين (٢) متساويين (٣) متعامدين
الاجوبة (١) أ = ــ ٤ ، ب ≠ ٢ او آ = ٤ ، ب ≠ ــ ٢
(٢) أ = ــ ٤ ، ب = ٢ او أ = ٤ ، ب = ــ ٢
(٣) أ = صفر ، ب اية قيمة

(٢٠) عين قيمة م ∈ ح اذا علمت ان المستقيمات س + ص + ٣ = ٠ ، م س + ص ــ ١٣ = ٠ ، ٢ س ــ ص + ٣ = صفر ، مشتركة بنقطة واحدة ثم جد احداثيي نقطة تقاطعهما .
الجواب أ = ــ ٧ ، (ــ ٢ ، ــ ١) .

(٢١) جد قيمة م ∈ ح اذا علمت ان المستقيمين م س + (٢م + ٣) ص + م + ٦ = ٠ ، (٢م + ١) س + (م ــ ١) ص + م ــ ٢ = صفر ، متقاطعان في نقطة واحدة تقع على محور الصادات .
الجواب م١ = صفر ، م٢ = ٦

(٢٢) اكتب معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ــ ٧) والذى يقطع جزئين متساويين من المحورين .
(الجواب : س + ص + ٤ = ٠ .

(٢٣) اكتب معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) والذى يقطع جزئين متساويين بقيمتيهما المطلقتين من المحورين .
الجواب : س + ص ــ ٥ = صفر ، س ــ ص + ١ = ٠ ، ٣ س ــ ٢ ص = ٠

(٢٤) ظلل كلا من المجموعات التالية في المستوى الاقليدى

هـ١ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س = صفر ، ص ≤ صفر }

هـ٢ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص = ٣ ، س + ١ ≥ ٠ }

هـ٣ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص < ٣ ، س > ــ ٢ }

هـ٤ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ــ ٥ ≤ س < ٣ ، ــ ٣ < ص ≤ ٥ }

هـ٥ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، | ٤ ــ س | ≤ ١ ، ص٢ ــ ٤ ≤ صفر }

هـ٦ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح+ × ح+ ، ــ ٢ < ٤ ــ س < ١ ، ٤ ــ ص٢ ≤ صفر }

هـ٧ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س٢ < ٣ س ، ٣ ص ≤ ص٢ }

هـ٨ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س + ٣ ص ≥ ٠ ، س٢ ــ ٤ ≤ صفر }

* $هـ_{٩}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، ٣س − ٤ص ≤ ١٢ ، ص > −٣}

$هـ_{١٠}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ $ح^{-}$ × $ح^{+}$ ، س > ٢ص ، س + ص ≥ ٤}

$هـ_{١١}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ {−٢} × ح}

$هـ_{١٢}$ = {(س، ص) : س ≤ ص ≤ س + ١ ، (س، ص) ∈ ح × ح}

$هـ_{١٣}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، س ∈]−٣ ، ٢] ∪ [٤ ، ٧] ، ص ∈ [−٣ ، −١] ∪]٣ ، ٦[}

$هـ_{١٤}$ = {(س، ص) : ص ≥ |س|} ، $هـ_{١٥}$ = {(س، ص) : |س| + |ص| < ٢}

$هـ_{١٦}$ = {(س، ص) : |س| + |ص| > ٢} ، $هـ_{١٧}$ = {(س، ص) : |س| − |ص| < ١}

$هـ_{١٨}$ = {(س، ص) : |س + ٢ص| < ٤} ، $هـ_{١٩}$ = {(س، ص) : |س| < |ص|}

$هـ_{٢٠}$ = {(س، ص) : |س| + س < ٢ص} ، $هـ_{٢١}$ = {(س، ص) : س ≤ ٢ص ، ص ≥ ٢س}

$هـ_{٢٢}$ = {(س، ص) : $س^{٢}$ ≥ ١ ، $ص^{٢}$ < ٤}

(٢٥) اذا كانت النقطة أ (هـ − ٤ ، ٤ + ٣هـ) ∈ المستقيم المار من النقطتين (−٥ ، ٦) ، (−٥ ، −٢) فجد معادلة المستقيم المار من أ ونقطة الاصل حيث هـ ∈ ح

الجواب س + ٥ص = ٠

(٢٦) لتكن $هـ_{١}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، س + ص ≤ ٦}

$هـ_{٢}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، س + ص > −٤}

$هـ_{٣}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، ٢س − ٣ص > −١٢}

$هـ_{٤}$ = {(س، ص) : (س، ص) ∈ ح × ح ، ٣س − ٢ص ≤ ١٢}

(١) ظلل مجموعة النقاط التي تمثلها $هـ_{١}$ ∩ $هـ_{٢}$ = $هـ_{٥}$

(٢) ظلل مجموعة النقاط التي تمثلها $هـ_{٦}$ = $هـ_{٣}$ ∩ $هـ_{٤}$

(٣) ظلل مجموعة النقاط التي تمثلها $هـ_{٧}$ = $هـ_{٥}$ ∩ $هـ_{٦}$

* (٤) جد المساحة التي تشغلها $هـ_{٧}$

(٢٧) جد ميل المستقيم الذى يصنع ٣٠° مع الاتجاه الموجب للمحور الاول .

الجواب : $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٢٨) جد ميل المستقيم الذى يصنع مع المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ـ ١) ، (٥ ، ٣) زاوية قدرها ٤٥°

الجواب : $\frac{١}{٧}$ ، ـ ٧

(٢٩) مستقيم ميله $\frac{٣}{٤}$ فما الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب للمحور الاول

الجواب ٣٧°

(٣٠) جد ميل المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (٤ ، ٧)

الجواب $\frac{٧}{٤}$

(٣١) اثبت ان المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، ٨) ، (ـ ٢ ، ١) يوازى المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (ـ ٤ ، ـ ٢) .

(٣٢) اثبت ان المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (٥ ، ٥) عمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ١) .

(٣٣) لتكن كل من أ (٦ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (ـ٢ ، ٣) ، د (س ، ٢) نقطة وكان أ ب // حـ د فجد قيمة س .

(٣٤) اثبت ان المثلث الذى رؤوسه النقاط ا (٣ ، ٢) ، ب (ـ ٤ ، ٣) ، حـ (٥ ، ـ ٦) مثلث منفرج الزاوية في ا

(٣٥) أ ب حـ د متوازى اضلاع احداثيات رؤوسه أ (٢ ، ـ ٦) ، ب (ـ٢ ، ـ٤) ، حـ (ـ ٢ ، ٥) جد احداثيات راسه الرابع . ثم جد الزاوية الحادة بين قطريه .

الجواب د (٢ ، ٣) $طا^{-١} \frac{٦٢}{٦١}$

(٣٦) متوازى اضلاع نقطتان متجاورتان من نقاط رؤوسه (ـ ٣ ، ٣) ، (٢ ، ٠) فاذا كانت نقطة تقاطع قطريه هي (ـ ١ ، ٠) . جد احداثيي النقطتين الباقيتين

الجواب (١ ، ـ ٣) ، (ـ ٤ ، ٠) .

(٣٧) جد الزاوية المحصورة بين المستقيمين المرسومين من النقطة (٢ ، ١) الى النقطتين (٥ ، ١) ، (٤ ، ٢)

الجواب ٤٥°

(٣٨) اثبت ان امتداد المستقيم الواصل بين النقطتين (١ ، ٣) ، (ـ٢ ، ٤) يصنع زاوية قدرها ١٢٠° مع المستقيم الواصل بين النقطتين (ـ $\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{٣}\sqrt{٣}$)

(٣٩) جد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قدرها ٣٠° مع مستقيم ميله يساوى (٢) .

(٤٠) اذا كان ميل المستقيم أب = $\frac{٣}{٤}$ ، وكانت أ (٨ ، ــ ٣) ،

ب (٢هـ ، ــ ٣ هـ) حيث هـ ∈ ح نجد احداثي نقطة ب

الجواب (٤ ، ــ ٦)

(٤١) ارسم مستقيما يمر بالنقطة (ــ ٣ ، ٤) وميله يساوى $\frac{-٢}{٣}$

* (٤٢) جد مركز الشكل السداسي المنتظم اذا علم ان نقطتين من نقاط رؤوسه

م (٢ ، ٠) ، ب (٥ ، ٣ $\sqrt{٣}$) .

الجواب (٨ ، ٠) أو (-١ ، ٣$\sqrt{٣}$)

(٤٣) جد ميل المستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٦) والذى يقطع من محورى السينـــات والصادات جزئين مجموع طوليهما (٢٢) وحدة .

(٤٤) $م_١$ هو المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٤) ، $م_٢$ هو المستقيم المار بالنقطتين حـ (ــ ٢ ، ١٠) ، د (ــ ٤ ، ١٢) برهن على ان النقـــاط أ ، ب ، حـ ، د على استقامة واحدة (برهن ان $م_١$ = $م_٢$)

المسافة بين نقطتين

ملاحظات

اولا ــ المسافة بين النقطتين م ، ن على مستقيم احداثي تساوى |ق (م) ــ ق(ن)| حيث ان ق النظام الاحداثي للمستقيم .

(أ) المسافة بين نقطتين مختلفتين يكون عددا حقيقيا موجبا .

اذ ان |ق (م) ــ ق (ن)| > صفر لان ق تطبيق متباين

(ب) المسافة بين نقطة ونفسها يكون صفرا . وبالعكس اذا كانت المسافة بين م ، ن = صفر فان م = ن اى |ق (م) ــ ق (ن)| = صفر ⟺ م = ن

(حـ) المسافة بين م ، ن تساوى المسافة بين ن ، م لان

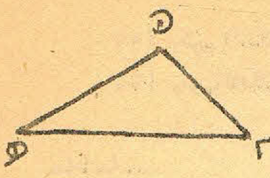
|ق(م) ــ ق (ن)| = |ق(ن ــ ق (م)| خواص القيمة المطلقة

(د) المسافة بين م ، ن + المسافة بين ن ، هـ ≥ المسافة بين م ، هـ

وذلك لان

|ق (م) ــ ق (هـ)| = |ق(م) ــ ق (ن) + ق (ن) ــ ق(هـ)| ≥

|ق (م) ــ ق(ن)| + |ق (ن) ــ ق (هـ)|



شكل (١ـ٢)

٠(١) او اذا كانت م ، ن ، هـ ليست على استقامة واحدة فانه يمكن تعيين مثلث رؤوسه هذه النقاط الثلاث وبما ان مجموع اى ضلعين في المثلث اكبر من ضلعه الثالث

∴ المسافة بين م ، ن + المسافة بين ن ، هـ > المسافة م ، هـ

(٢) اذا كانت م ، ن ، هـ على استقامة واحدة فان الكل = مجموع اجزائه



شكل (١ـ٣)

اى المسافة بين م ، ن + المسافة بين ن هـ = المسافة بين م ، هـ اى يمكن استخدام هذه الملاحظة لبرهان ان النقاط الثلاث على استقامة واحدة .

ثانيا ـ ليكن ك مستويا اقليديا وليكن كل من أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ نقطة في ك فان المسافة بين أ ، ب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢} = د(أ ، ب)$

ثالثا ـ المسافة بين المستقيم الذى معادلته أس + ب ص + حـ = ٠ والنقطة أ $(س_١ ، ص_١)$ في المستوى الاقليدى = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ = ف

رابعا ـ في المستوى الاقليدى المتعامد المحورين

في △ أ ب جـ اذا كان

(١) $[أ جـ]^٢ = [أ ب]^٢ + [ب جـ]^٢$ كان المثلث قائم الزاوية في (ب) (فيثاغورس)

(٢) $[أ جـ]^٢ > [أ ب]^٢ + [ب جـ]^٢$ كان المثلث منفرج الزاوية في (ب)

(٣) $[أ جـ]^٢ < [أ ب]^٢ + [ب جـ]^٢$ كان المثلث حاد الزاوية في (ب)

خامسا ـ في المستوى الاقليدى المتعامد المحورين

إنّ اى شكل رباعي اذا كان

(١) كل ضلعين متقابلين فيه متساويان كان الشكل متوازى اضلاع

(٢) كل ضلعين متقابلين فيه متساويان واحدى زواياه قائمة كان الشكل مستطيلا او كل ضلعين متقابلين متساويين والقطران متساويان كان الشكل مستطيـلا

(٣) جميع اضلاعه متساوية كان الشكل معينا

(٤) جميع اضلاعه متساوية واحدى زواياه قائمة كان الشكل مربعا

(٥) يكون الشكل الرباعي معينا اذا تعامد وتناصف قطراه
(٦) يكون الشكل الرباعي مربعا اذا تعامد وتناصف قطراه وكان لهما نفس القياس

سادسا ـ
(١) مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب القطرين

(٢) مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع قاعدتيه المتوازيتين × ارتفاعه

(٣) مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث او رؤوس اى شكل تكون على ابعاد متساوية من الرؤوس .

تماريـــــن ١ ـ ٤

١ ـ اذا كانت النقاط أ (٣ ، ـ ٧) ، ب (٥ ، ـ ٧) ، حـ (ـ ٢ ، ٥) تمثل ثلاثة رؤوس لمتوازي الاضلاع أ ب حـ د واذا كان راسه الرابع د يقابل الراس ب .
جد طول كل من قطريه
الجواب ١٣ ، ١٥ وحدة

* ٢ ـ النقطتان أ (٣ ، ـ ٤) ، ب (١ ، ٢) راسان متقابلان في معين طول ضلعه ٥ $\sqrt{٢}$ جد ارتفاعه
الجواب ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة

٣ ـ النقطتان أ (٤ ، ٩) ، ب (ـ ٢ ، ١) راسان متقابلان في معين طول ضلعه ٥ $\sqrt{١٠}$ فجد مساحة هذا المعين .
الجواب ١٥ وحدة مربعة

٤ ـ اثبت ان النقاط أ (٣ ، ـ ٥) ، ب (ـ ٢ ، ـ ٧) ، حـ (١٨ ، ١) تقع على استقامة واحدة

* ٥ ـ اثبت ان المثلث الذى رؤوسه أ (٢ ، ٢) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (٥ ، ـ ١) هو مثلث قائم الزاوية .

* ٦ ـ برهن ان النقاط أ (٢ ، ٢) ، ب (ـ ٢ ، ٦) ، حـ (٢ ، ١٠) ، د (٦ ، ٦) هي رؤوس مربع

٧ ـ برهن ان المثلث الذى رؤوسه النقاط أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (٢ ، ـ ١) منفرج الزاوية في أ

٨ ـ برهن ان الزوايا الداخلية للمثلث الذى رؤوسه النقاط أ (ـ ١ ، ٣) ، ب (١ ، ٢) ، حـ (٠ ، ٤) جميعها حادة .

٩ ـ النقاط أ (٥ ، ٠) ، ب (٠ ، ١) ، حـ (٣ ، ٣) هي رؤوس مثلث احسب الزاوية الخارجية عند أ
الجواب: ∠ ب أ حـ = ٤٥° ، ∠ أ ب حـ = ٤٥°

★ ١٠ــ النقاط أ (ــ √٣ ، ١) ، ب (٠ ، ٢) ، ح (ــ٢ √٣ ، ٢)
رؤوس مثلث . احسب الزاوية الخارجية عند الرأس أ .
الجواب ٦٠°

١١ــ جد النقطة م ∈ المحور الاول والمسافة بينها وبين النقطة (٢ ، ٣٠) تساوى ٥ وحدات
الجواب م$_{١}$ (٦ ، ٠) ، م$_{٢}$ (ــ ٢ ، ٠) جوابان للحل .

١٢ــ جد النقطة م ∈ المحور الثاني والمسافة بين م والنقطة (ــ ٨ ، ١٣) تساوى ١٧ وحدة
الجواب: جوابان للحل م$_{١}$ (٠ ، ٢٨) ، م$_{٢}$ (٠ ، ــ٢)

١٣ــ اذا كانت النقطتان م (٢ ، ٢) ، ن (٥ ، ــ ٢) جد النقطة ل ∈ المحور الاول بحيث م ل ن مثلث قائم الزاوية .
الجواب: جوابان للحل ل$_{١}$ (١ ، ٠) ، ل$_{٢}$ (٦ ، ٠)

★ ١٤ــ النقطتان أ (٣ ، ٠) ، ح (ــ ٤ ، ١) راسان متقابلان لمربع . جد بقية رؤوس هذا المربع
الجواب: ب (٠ ، ٤) ، د (ــ ١ ، ــ ٣)

★ ١٥ــ النقطتان أ (٢ ، ــ ١) ، ب (ــ ١ ، ٣) راسان متجاوران لمربع جد بقيـة رؤوسه
الجواب مربعان يحققان شروط التمرين ح$_{١}$ (ــ ٥ ، ٠) ، د$_{١}$ (ــ٢ ، ــ ٤)
، ح$_{٢}$ (٣ ، ٦) ، د$_{٢}$ (٦ ، ١٢)

١٦ــ برهن ان النقاط أ (ــ ٣ ، ٦) ، ب (٩ ، ــ ١١) ، ح (ــ ٥ ، ٤) دائرية . ثم جد مركز الدائرة المارة بها ونصف قطرها .
الجواب م (٣ ، ــ ٢) ، نق = ١٠

★ ١٧ــ أ ب ح د مستطيل فيه أ (٨ ، ٨) ، ح (ــ ٢ ، ٣) فاذا علمت ان طوله يساوى ضعف عرضه . فما مساحته .
الجواب ١٥ وحدة ، ١٠ وحدات

★ ١٨ــ برهن تحليليا ان
اــ اقطار المستطيل متساوية
ب ــ مجموع مربعي بعدى اى نقطة عن راسين متقابلين في مستطيل يساوى مجموع مربعي بعد نفس النقطة عن الراسين الاخرين لهذا المستطيل .

ملاحظات

(١) احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين النقطتين أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$
من الداخل بنسبة $\text{ر}_1 : \text{ر}_2$ ، حيث $\text{ر}_1 : \text{ر}_2 \in \text{ح}$ ، وان أ $\neq$ ب هي

$$\left(\frac{\text{ر}_2 \text{س}_1 + \text{ر}_1 \text{س}_2}{\text{ر}_1 + \text{ر}_2} ، \frac{\text{ر}_2 \text{ص}_1 + \text{ر}_1 \text{ص}_2}{\text{ر}_1 + \text{ر}_2} \right)$$

(٢) احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين النقطتين أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$
من الخارج (اى ان النقطة تقع على امتداد قطعة المستقيم) بنسبة $\frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2}$ هي
نفس احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين أ ، ب من الداخل بعد جعل اشارتي ر_1 ، ر_2 مختلفتين

اى $$\left(\frac{\text{ر}_2 \text{س}_1 - \text{ر}_1 \text{س}_2}{\text{ر}_2 - \text{ر}_1} ، \frac{\text{ر}_2 \text{ص}_1 - \text{ر}_1 \text{ص}_2}{\text{ر}_2 - \text{ر}_1} \right)$$

(٣) في حالة تقسيم قطعة المستقيم أ ب من الخارج
(أ) اذا كانت $|\text{ر}_1| > |\text{ر}_2|$ فان نقطة التقسيم حـ تقع خارج قطعة المستقيم أ ب باتجاه ب .
(ب) اذا كانت $|\text{ر}_1| < |\text{ر}_2|$ فان نقطة التقسيم حـ تقع خارج قطعة المستقيم أ ب باتجاه أ

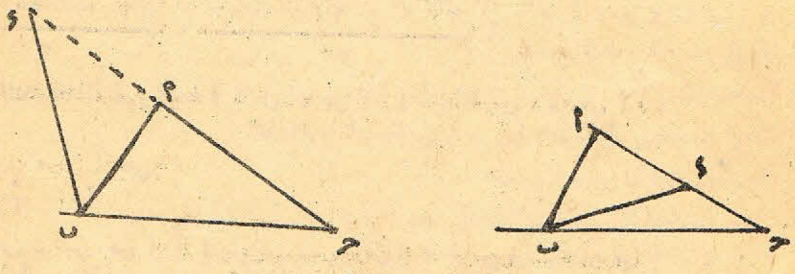
(٤) اذا لم يذكر نوع التقسيم فان النسبة $\text{ر}_1 : \text{ر}_2$ تحدد ما اذا كان التقسيم من الداخل او من الخارج كما يلي .
(أ) اذا كانت $\text{ر}_1 : \text{ر}_2$ موجبة كان التقسيم من الداخل
(ب) اذا كانت $\text{ر}_1 : \text{ر}_2$ سالبة كان التقسيم من الخارج

(٥) في حالة التعويض بنسبة التقسيم من الخارج بقانون التقسيم من الخارج لاتوخـــذ الاشارة السالبة •

(٦) المستقيم لاينقسم في نقطتين بنسبة واحدة سواء كان التقسيم من الداخل او الخارج

(٧) المستقيم المتوسط هو المستقيم الواصل بين راس من رؤوس مثلث ومنتصف الضلــع المقابل له وتلتقي المستقيمات المتوسطة لمثلث في نقطة • تبعد بمقدار ثلثيـــن من جهة الراس الى ثلث من جهة القاعدة اى ان نسبة التقسيم هي (٢) من جهـــة الراس الى (١) من جهة القاعدة كتقسيم من الداخل •

(٨) المنصف (الداخلي او الخارجي) لاحدى زوايا مثلث يقسم الضلع المقابل لهـــا او امتداده بنسبة الضلعين المحيطين بها كما موضح في شكل ١ـ٤



(شكل ١ـ٤)

$$\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{د حـ}}{\text{د ا}} = \frac{ر_1}{ر_2}$$

تمارين ١ـ ٥

(١) برهن تحليليا (آن) :

١ـ المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعي مثلث يوازى ضلعه الثالث ويساوى نصفه .

٢ـ في المثلث القائم الزاوية طول المستقيم المنصف للوتر من رأس الزاوية القائمة يساوى نصف طول الوتر .

٣ـ نقطة منتصف الوتر في مثلث قائم الزاوية تبعد بابعاد متساوية عن رؤوس المثلث .

٤ـ قطرى متوازى الاضلاع ينصف كل منهما الاخر .

٥ـ مركز ثقل المثلث الذى رؤوسه أ ($س_{1}$ ، $ص_{1}$) ، ب ($س_{2}$ ، $ص_{2}$) ، حـ ($س_{3}$ ، $ص_{3}$) هي النقطة

$$\left(\frac{س_{1} + س_{2} + س_{3}}{3} ، \frac{ص_{1} + ص_{2} + ص_{3}}{3} \right)$$

٦ـ مساحة المثلث الذى رؤوسه ا ($س_{1}$ ، $ص_{1}$) ، ب ($س_{2}$ ، $ص_{2}$) ، حـ ($س_{3}$ ، $ص_{3}$) هي :

$$\frac{1}{2} \left(س_{1}ص_{2} - س_{2}ص_{1} \right) + \left(س_{2}ص_{3} - س_{3}ص_{2} \right) + \left(س_{3}ص_{1} - س_{1}ص_{3} \right)$$

٧ـ القاعدة الوسطى لشبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع قاعدتيه المتوازيتين .

٨ـ المستقيمات الواصلة بين منتصفات اضلاع اى شكل رباعي تكون متوازى اضلاع .

٩ ـ المستقيمات الواصلة بين منتصفات الاضلاع المتقابلة في اى شكل رباعي متناصفة .

* ١٠ـ المستقيم الواصل بين راس متوازى اضلاع ومنتصف الضلع المقابل يقطع القطر المقابل في نقطة تقسم كل من المستقيمين بنسبة ١ : ٢

* ١١ـ المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين متقابلين في شكل رباعي والمستقيم الواصل بين منتصفي قطرى هذا الشكل الرباعي ينصف احدهما الاخر .

* ١٢ـ المستقيمات الواصلة بين منتصفات اضلاع اى شكل رباعي تكون شكلا رباعيا محيطه يساوى مجموع اقطار الشكل الرباعي الاول ومساحته تساوى نصف مساحة الشكل الرباعي الاول .

١٣ـ قطرى المربع متعامدان ومتناصفان .

١٤ـ قطرى المعين متعامدان ومتناصفان .

١٥ـ اذا كانت اقطار المستطيل متعامدة فان هذا المستطيل مربع .

(٢) أب قضيب متجانس اذا كانت أ(٣ ، ـ ٥) ، ب (ـ ١ ، ١) فما هو مركز ثقلـــه ٠

الجواب (١ ، ـ ٢)

(٣) قضيب متجانس مركز ثقله النقطة م (١ ، ٤) واحدى نهايتيه أ (ـ ٢ ، ٢) عين احداثيي نهايته الثانيــة ٠

الجواب (٤ ، ٦) ٠

(٤) النقاط أ (٢ ، ـ ١) ، ب (ـ ١ ، ٤) ، حـ (ـ ٢ ، ٢) هي منتصفـات اضلاع المثلث ٠ جد احداثيات رؤوسه ٠

الجواب (١ ، ـ ٣) ، (٣ ، ١) ، (ـ ٥ ، ٧)

(٥) أ (ـ ٣ ، ٥) ، ب (١ ، ٧) نقطتان متجاورتان لمتوازى الاضلاع أب حـ د فاذا كانت م (١ ، ١) ملتقى قطريه ٠ جد احداثيي كل من حـ ، د ٠

الجواب (٥ ، ـ ٣) ، (١ ، ٣) ٠

* (٦) النقاط أ ، ب ، حـ ، د اربعة رؤوس لمتوازى اضلاع فاذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ـ ١) ، حـ (٠ ، ٥) جد احداثيي راسه الرابع د ٠

الجواب الراس الرابع لمتوازى الاضلاع يقابل اى واحد من الرؤوس المعطـــاة ٠ كذلك توجد ثلاثة متوازيات اضلاع تحقق شروط التمرين ٠ وتكون نقطة د كما يلي

د١ (٢ ، ١) ، د٢ (ـ ٢ ، ٩) ، د٣ (٦ ، ـ ٣)

(٧) النقاط أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، ـ ٩) ، حـ (ـ ٥ ، ٢) ثلاثة رؤوس لمثلث جد طول المستقيم المتوسط المرسوم من ب ٠

الجواب ١٣ وحدة ٠

(٨) رؤوس المثلث ا (٣ ، ـ ٥) ، ب (١ ، ـ ٣) ، حـ (٢ ، ـ ٢) ٠ احسب طول المنصف الخارجي للزاوية ب ٠

الجواب ٤ وحدات

(٩) النقاط أ (٣ ، ـ ٥) ، ب (ـ ٣ ، ٣) ، حـ (ـ ١ ، ـ ٢) رؤوس مثلث جد طول المنصف الداخلي للزاوية أ ٠

الجواب ١٤/٣ √٢ وحدة

(١٠) أ (١ ، ـ ١) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (٤ ، ٥) ثلاث نقاط على استقامة واحدة ٠ احسب النسبة التي تقسم بها احدى النقاط اعلاه قطعه المستقيم المحددة بالنقطتين الباقيتين

الجواب أب / بحـ = ٢ / ١ ، أحـ / حـب = ـ ٣ / ١ ، ب أ / أحـ = ـ ٢ / ٣

(١١) قطعة المستقيم أ ب قسمت الى ثلاثة اقسام متساوية بالنقطتين حـ (٢ ، ٢) ، د (١ ، ٥) . جد احداثيي النهايتين أ ، ب

الجواب أ (٣ ، ـ ١) ، ب (٠ ، ٨) .

(١٢) جد الاحداثي السيني للنقطة حـ علما ان احداثيها الصادي = ـ ٥ ، وان هذه النقطة تقع على المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ـ ٣) ، ب (ـ ٦ ، ٥)

الجواب (٤ ، ـ ٥)

(١٣) جد النقطة التي عندها يقطع المستقيم المار بالنقطتين أ (٧ ، ـ ٣) ، ب (٢٣ ، ـ ٦) المحور الاول .

الجواب (ـ ٩ ، ٠)

(١٤) جد النقطة التي عندها يقطع المستقيم المار بالنقطتين أ (٥ ، ٢) ، ب (ـ ٤ ، ـ ٧) المحور الثاني

الجواب (٠ ، ـ ٣)

(١٥) النقاط أ (ـ ٣ ، ١٢) ، ب (٣ ، ـ ٤) ، حـ (٥ ، ـ ٤) ، د (٥ ، ٨) هي رؤوس شكل رباعي جد النسبة التي يقسم بها القطر أ حـ القطر ب د

الجواب ١ : ٣ مبتدئا من النقطة ب

(١٦) أ (٢ ، ـ ٣) ، ب (ـ ٥ ، ١) راسان للمثلث أ ب حـ اما راسه حـ فيقع على المحور الثاني . فاذا كان مركز ثقله م يقع على المحور الاول فاحسب احداثيي كل من النقطتين م ، حـ

الجواب م (ـ ١ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٢) .

(١٧) لتكن أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) ، حـ ($س_3$ ، $ص_3$) ثلاثة رؤوس لصفيحة مثلثية منتظمة الشكل . فاذا وصلت منتصفات اضلاعه تكونت صفيحة مثلثية منتظمة الشكل ايضا . اثبت ان مركز ثقل الاولى هو مركز ثقل الثانية نفسه .

(١٨) جد احداثيي النقطة التي تقسم المسافة بين النقطتين (٣ ، ـ ١) ، (ـ ٢ ، ٥) بنسبة ـ $\frac{١}{٢}$.

الجواب : (٨ ، ـ ٧)

(١٩) [$\overline{أ ب}$] قطعة مستقيمة ولتكن حـ نقطة واقعة عليها بحيث ٢ [$\overline{أ حـ}$] = [$\overline{حـ ب}$] فاذا كانت أ (١ ، ـ ٥) ، ب (٤ ، ١) فجد احداثيي نقطة حـ

الجواب (ـ ٥ر٣ ، ٥ر٨)

(٢٠) جد النسبة التي ينقسم بها المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، ٣) ، (٢ ، ـ ٤) بمحور الصادات مبينا نوع التقسيم .

الجواب ٥ : ٢ من الخارج

(٢١) جد النقطة التي تقسم بها النقطة (س ، ٣) المسافة بين النقطتين (٣ ، ٨) ، (ـ ١ ، ـ ١٢) مبينا نوع التقسيم ثم جد قيمة س

الجواب ١ : ٣ من الداخل ، س = ٢

(٢٢) لتكن كل من أ (٨ ، ٦) ، ب (ـ ٦ ، ـ ٣) نقطة وصل أ ب فقطع محوري الاحداثيات في حـ ، د على الترتيب جد قيمتي (١) أب/حب (٢) أد/دب

الجواب ٢/١ ، ٤/٣ على الترتيب

(٢٣) النقطة (٥ ، ـ ١) تقسم المسافة بين أ ، ب بنسبة ٢ : ٣ فاذا كانت أ (١١ ، ـ ٣) فما احداثيات نقطة ب

الجواب (ـ ٤ ، ٢) او (١٤ ، ـ ٤)

(٢٤) اثبت ان النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ـ ٢) ، (ـ ٣ ، ١٦) بنسبة ١ : ٢ من الداخل هي التي تنصف المسافة بين النقطتين (٣ ، ـ ١) ، (ـ ١ ، ٩)

الجواب (١ ، ٤)

(٢٥) اذا كانت النقطة (ـ ٢ ، ٣) هي نقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث الذى رؤوسه ا (١ ، ٥) ، ب (ـ ٣ ، ـ ٤) ، حـ (هـ ، و) فجد احداثيي نقطة حـ .

الجواب حـ (ـ ٤ ، ٨)

(٢٦) اثبت ان المثلث الذى رؤوسه النقاط أ (٢ ، ٧) ، ب (ـ ١ ، ٣) ، حـ (ـ ٢ ، ٤) مثلث متساوى الساقين ثم برهن ان المستقيم الواصل بين آ والنقطة التي تنصف (ب حـ) يكون عمودا عليه .

(٢٧) جد احداثيات النقاط التي تقسم البعد بين النقطتين (٤ ، ـ ١) ، (ـ ٤ ، ـ ٥) الى اربعة اقسام متساوية .

الجواب (٢ ، ـ ٢) ، (٠ ، ـ ٣) ، (ـ ٢ ، ـ ٤) .

* (٢٨) ا ب حـ مثلث رؤوسه ا (ـ ٦ ، ٨) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (ـ ٢ ، ـ ١) والمنصف الداخلي لزاوية ب يلاقي آ حـ في د والمنصف الخارجي لنفس الزاوية يلاقي امتداد أ حـ في هـ . فاذا كان د ب هـ ك متوازى اضلاع فجد احداثيي نقطة ك . ثم برهن ان د ب هـ ك مستطيل .

الجواب (ـ ١٠/٣ ، ـ ١٠)

* (٢٩) أ ب حـ مثلث رؤوسه أ (٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ٣) ، حـ (ـ ٤ ، ٤) نصفت قطعة المستقيم آ ب في د . ووصل حـ د ونصف آ د في هـ . ورسم هـ و // ب حـ في ق . ثم وصل ب ق فقطع د حـ في نقطة ى . جد احداثيي نقطة ى .

الجواب ى (٢ ، ٤) .

(٣٠) آب حـ د شبه منحرف فيه أد // ب حـ ، أ (٢ ، ١) ، ب (ـ ٣ ، ٣) ،
حـ (٣ ، ـ ٥) ، د (٥ ، ـ ٣) فاذا تقاطع أ حـ ، ب د في نقطة هـ
فما قيمة أ هـ : هـ حـ وما احداثيي نقطة هـ .
الجواب $\frac{١}{٢}$ ، هـ ($\frac{٧}{٣}$ ، ـ ١)

(٣١) أ ب حـ د متوازي اضلاع مركزه م واحداثيات رؤوسه أ (٤ ، ٦) ،
ب (٤ ، ٢) ، حـ (ـ ٢ ، ٦) مد آ د على استقامته بقدر نفسه الى نقطة هـ
ثم وصل م هـ فقطع حـ د في نقطة ن جد احداثيي نقطة ن
الجواب (ـ ٢ ، $\frac{٢٦}{٣}$)

تمارين عامـــة ١ ــ ٦

(١) برهن باستخدام الميل ان النقاط أ (٣ ، ــ ٤) ، ب (٧ ، ٣) ، حـ (٠ ، ٧) هي رؤوس لمثلث قائم الزاوية في ب . ثم جد احداثيي مركـــز الدائرة المرسومة خارج المثلث وطول نصف قطرها .

الجواب (١ر٥ ، ١ر٥) ، نق = $\frac{\sqrt{١٣٠}}{٢}$

(٢) النقاط ب (٢ ، ٠) ، حـ (٨ ، ١) ، د (٢ ، ٤) ثلاثة رؤوس لمتوازى الاضلاع ب حـ د هـ . جد طول قطره ($\overline{\text{حـ هـ}}$) .

الجواب: ٢ $\sqrt{٣٧}$ وحدة

(٣) برهن ان النقاط (٧ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١٠ ، ــ ٣) ، (٥ ، ــ ٥) هي رؤوس مربع . ثم برهن تعامد قطريه .

(٤) برهن ان الشكل الرباعي الذى رؤوسه النقاط أ (ــ ٤ ، ٦) ، ب (٠ ، ٤) ، حـ (ــ ٥ ، ــ ٦) ، د (ــ ٧ ، ٠) هو شبه منحرف . ثم جد مساحته .

الجواب: ٤٠ وحدة مربعة

(٥) أ ب حـ مثلث أ (٦ ، ٨) ، ب (ــ ٢ ، ــ ٦) ، حـ (ــ ٤ ، ٤) جد مساحة الجزء المحصور من المثلث بين محور الصادات والنقطة أ

الجواب: ٢٤ر٣ وحدة مربعة

(٦) احسب مساحة كل من المثلثات التي احداثيات رؤوسها كما يلي :ــ

(١) أ (٢ ، ــ ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (ــ ٢ ، ٥)

(٢) أ (ــ ٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ــ ٢) ، حـ (١ ، ٣)

(٣) أ (٣ ، ــ ٤) ، ب (ــ ٢ ، ٣) ، حـ (٤ ، ٥) .

الجواب ١٤ ، ١٢ ، ٢٦ وحدة مربعة على الترتيب

(٧) اثبت باستخدام بعد نقطة عن مستقيم (ف) (المسافة بين النقطة والمستقيم في المستوى الاقليدى) ان النقاط أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، ــ ٢) ، حـ (ــ ٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة .

(٨) النقاط أ (٣ ، ٦) ، ب (ــ ١ ، ٣) ، حـ (٢ ، ــ ١) هي رؤوس مثلث . فجد طول ارتفاعه من الرأس حـ .

الجواب ٥ وحدة

(٩) احسب مساحة متوازى الاضلاع الذى ثلاثة رؤوس من رؤوسه هي أ (ــ ٢ ، ٣) ب (٤ ، ــ ٥) ، حـ (ــ ٣ ، ١)

الجواب ٢٠ وحدة مربعة

(١٠) النقاط أ (٣ ، ٧) ، ب (٢ ، ــ ٣) ، حـ (ــ ١ ، ٤) ثلاثة رؤوس لمتوازى اضلاع فجد ارتفاع الراس ب عن الضلع أ حـ

الجواب ٤ر٧ وحدة

(١١) أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٥) ، حـ (ــ ١ ، ٧) ، د (ــ ٧ ، ٥) اربعة رؤوس متتالية لشكل رباعي منتظم فجد احداثيي مركز ثقلــــه ٠

الجواب (٧/١٧ ، ١/٣ ٣)

(١٢) اذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ تساوى ٣ وحدات مربعة وان أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ــ ٣) جـد احداثيي الراس حـ ٠ اذا علمت انها تقع على محـــــور الصادات ٠

الجواب: (٠ ، ٨) او (٠ ، ــ ٢)

(١٣) مساحة المثلث أ ب حـ تساوى (٤) وحدات مربعة ٠ فاذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ــ ١) فجد احداثيي الراس حـ ٠ اذا علمت انها تقع على محـــــور السينات ٠

الجواب (٥ ، ٠) او (ــ ١/٢ ، ٠)

* (١٤) اذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ تساوى (٣) وحدات مربعة وان أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ــ ٣) فجد احداثيي راسه حـ اذا علمت ان مركز ثقل المثلث يقع على محور السينـــات ٠

الجواب (٥ ، ٢) او (٢ ، ٢)

* (١٥) اذا كانت مساحة متوازى الاضلاع أ ب حـ د تساوى (١٢) وحدة مربعــــة وان أ (ــ ١ ، ٣) ، ب (ــ ٢ ، ٤) جد احداثيات بقية رؤوسه اذا علمت ان نقطة تقاطع قطريه تقع على محور السينات ٠

الجواب حـ١ (ــ ٧ ، ــ ٣) ، د١ (ــ ٥ ، ــ ١٦) ، او حـ٢ (١٧ ، ــ ٣) ، د٢ (١٨ ، ــ ٤)

* (١٦) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين ارتفاعه (٨) وحدة وقاعدته ب حـ فاذا علمت ان ب (٢ ، ٦) ، حـ (ــ ٤ ، ٢) فجد احداثيي الراس أ ٠

الجواب

* (١٧) اذا علمت ان المعادلتين ٨ س + ٣ ص + ١ = ٠ ، ٢ ص + س ــ ١ = ٠ هما معادلتا ضلعين من اضلاع متوازى اضلاع والمعادلة ٣ س + ٢ ص + ٣ = ٠ هي معادلة احد اقطاره ٠ عين احداثيات رؤوس هذا المتوازى الاضلاع ٠

الجواب (١ ، ــ ٣) ، (ــ ٨ ، ٥) ، (٥ ، ــ ٩) ، (٨ ، ــ ١٧)

(١٨) اضلاع مثلث تقع على المستقيمات التي معادلاتها س + ٥ ص ــ ٧ = ٠ ، ٣ س ــ ٢ ص ــ ٤ = ٠ ، ٧ س + ص + ١٩ = ٠ احسب مساحة المثلث ٠

الجواب ١٧ وحدة مربعة ٠

(١٩) مساحة مثلث ٨ وحدات مربعة • راسان من رؤوسه هما النقطتان ا (١ ، ـ ٢)
، ب (٢ ، ٣) والراس حـ يقع على المستقيم ٢ س + ص ـ ٢ = ٠ احسب
احداثيات الراس الاخر حـ •
الجواب $حـ_{١}$ (ـ ١ ، ٤) او $حـ_{٢}$ ($\frac{٢٥}{٧}$ ، ـ $\frac{٣٦}{٧}$)

★ (٢٠) مساحة المثلث ٥ر١ وحدة مربعة راسان من رؤوسه النقطتان أ (٢ ، ـ ٣) ،
ب (٣ ، ـ ٢) ومركز ثقله يقع على المستقيم ٣ س ـ ص ـ ٨ = ٠ احسب
احداثيات راسه الثالث حـ •
الجواب $حـ_{١}$ (١ ، ـ ١) ، $حـ_{٢}$ (ـ ٢ ، ١٠)

(٢١) اذا كان م هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ٣ ص ـ ٣ = ٠
(١) جد ميل المستقيم الموازى الى م
(٢) جد ميل المستقيم العمود على م
الجواب ـ $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٣}{٥}$ على الترتيب

(٢٢) ليكن م هو المستقيم الذى معادلته ٢ س + ٣ص + ٤ = ٠
١ـ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) ويوازى م
٢ـ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١) ويكون عمودا على م
الجواب ٢ س + ٣ ص ـ ٧ = ٠ ، ٣ س ـ ٢ ص ـ ٤ = ٠

(٢٣) ضلعا مستطيل يقعان على المستقيمين اللذين معادلتهما •
٢ س ـ ٣ ص + ٥ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص ـ ٧ = ٠ على الترتيب واحد رؤوسه
النقطة أ (٢ ، ـ ٣) اكتب معادلتي الضلعين الاخرين لهذا المستطيل •
(الجواب ٣ س + ٢ ص = ٠ ، ٢ س ـ ٣ ص ـ ١٣ = ٠

(٢٤) ضلعا مستطيل يقعان على المستقيمين اللذين معادلتاهما س ـ ٢ ص = ٠ ،
س ـ ٢ ص + ١٥ = ٠ واحد اقطاره يقع على المستقيم الذى معادلته
٧ س + ص ـ ١٥ = ٠ ، جد احداثيات رؤوس هذا المستطيل •
الجواب (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (ـ ١ ، ٧) ، (١ ، ٨) •

(٢٥) جد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ $\sqrt{٢}$ والذى يبعد بمقدار (٥) وحدات
عن نقطة الاصل
الجواب ص ـ ٢ $\sqrt{٢}$ س = ± ١٥

جد معادلة المجموعة

هـ = {أ : أ نقطة المسافة بينها وبين م$_١$ = المسافة بينها وبين م$_٢$ في المستوى الاقليدى} اذا علمت ان م$_١$ ، م$_٢$ كما يلي :ـ

(١) م$_١$ هو المستقيم الذى معادلته ٣س ـ ٢ص ـ ١ = ٠

م$_٢$ هو المستقيم الذى معادلته ٣س ـ ٢ص ـ ١٣ = ٠

(٢) م$_١$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ص + ٣ = ٠

م$_٢$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ص ـ ١٧ = ٠

(٣) م$_١$ هو المستقيم الذى معادلته ٢ س + ٣ ص ـ ٦ = ٠

م$_٢$ هو المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٦ ص + ١٧ = ٠

(٤) م$_١$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ٧ ص + ١٥ = ٠

م$_٢$ هو المستقيم الذى معادلته ٥ س + ٧ ص + ٣ = ٠

(٥) م$_١$ هو المستقيم الذى معادلته ٣ س ـ ١٥ ص ـ ١ = ٠

م$_٢$ هو المستقيم الذى معادلته س ـ ٥ ص ـ ٢ = ٠

الاجوبة (١) {(س ، ص) : ٣ س + ٢ ص + ٥ = ٠}
(٢) {(س ، ص) : ٥ س + ص ـ ٧ = ٠}
(٣) {(س ، ص) : ٨ س + ١٢ ص + ٥ = ٠}
(٤) {(س ، ص) : ٥ س + ٧ ص + ٩ = ٠}
(٥) {(س ، ص) : ٦ س ـ ٣٠ ص ـ ٢ = ٠}

(٢٦) اذا علمت ان منتصفات اضلاع مثلث هي هـ (٢ ، ١) ، و (٥ ، ٣) ، ز (٣ ، ـ ٤) فجد معادلات اضلاعه

الاجوبة (١) ٧ س ـ ٢ ص ـ ١٢ = ٠ (٢) ٥ س + ص ـ ٢٨ = ٠

(٣) س ـ ٣ ص ـ ١٨ = ٠

(٢٧) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة ب (ـ ١ ، ٠) والعمود على القطعة المستقيمة أ ، ب اذا علمت ان أ (٢ ، ٣) ٠

الجواب س + ص + ١ = ٠

(٢٨) النقطة أ (٢ ، ١) هي اثر العمود النازل من نقطة الاصل الى مستقيم ما ٠ اكتب معادلة هذا المستقيم

الجواب ٢ س + ٣ ص + ١٣ = ٠

(٢٩) النقاط أ (٢ ، ١) ، ب (ـ ١ ، ـ ١) ، حـ (٣ ، ٢) هي رؤوس مثلث جد معادلات ارتفاعه ٠

الجواب (١) ٢ س + ٣ ص ـ ١٣ = ٠ (٢) ٣ ص + ٤ س ـ ١١ = ٠

(٣) ص + س + ٢ = ٠

(٣٠) عين نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث الذى معادلات اضلاعه هي

٤ س ـ ص ـ ٧ = ٠ ، س + ٣ ص ـ ٣١ = ٠ ، س + ٥ ص ـ ٧ = ٠

الجواب (٣ ، ٤)

(٣١) النقاط أ (١ ، ـ ١) ، ب (ـ ٢ ، ١) ، حـ (٣ ، ٥) هي رؤوس مثلث اكتب معادلة العمود النازل من النقطة أ على المستقيم المتوسط المرسوم من ب

الجواب ٤ س + ص ـ ٣ = ٠

(٣٢) النقاط أ (٢ ، ـ ٢) ، ب (٣ ، ـ ٥) ، حـ (٥ ، ٧) هي رؤوس مثلث ٠ اكتب معادلة العمود النازل من الراس حـ على المنصف الداخلي للزاوية؟

الجواب س ـ ٥ = ٠

(٣٣) اكتب معادلات الاضلاع والمستقيمات المتوسطة للمثلث الذى رؤوسه النقاط أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ـ ٢) ، حـ (١ ، ٠)

الجواب معادلة أب هي ٢ س + ص ـ ٨ = ٠ ، معادلة ب حـ هي س + ٢ ص ـ ١ = ٠ معادلة حـ أ هي س ـ ص ـ ١ = ٠ ، معادلة المستقيم المتوسط من الراس أ هي س ـ ٣ = ٠ من الراس ب هي س + ص ـ ٣ = ٠ ، من الراس حـ هي ص = صفر

(٣٤)برهن مايلي :ـ

النقاط الثلاث أ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ب ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، حـ ($س_{٣}$ ، $ص_{٣}$) تكـون على استقامة واحدة اذا كانت مساحة المثلث المارة بهذه الرؤوس الثلاثة = صفـــر، والعكس بالعكس .

(٣٥) النقاط أ (ـ ٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٩) ، حـ (٧ ، ٦) ، د (ـ ٢ ، ـ ٦) هي رؤوس شكل رباعي . عين نقطة تقاطع قطريه .

الجواب (١ ، ٣)

(٣٦) ليكن أ (ـ ٣ ، ـ ١) ، ب (٢ ، ٢) راسين متجاورين لمتوازي الاضلاع أ ب حـ د . اكتب معادلات اضلاعه اذا علمت ان نقطة تقاطع قطريه هي هـ (٣ ، ٠) .

الجواب ٣ س ـ ٥ ص + ٤ = ٠ ، س + ٧ ص ـ ١٦ = ٠ ،

٣ س ـ ٥ ص ـ ٢٢ = ٠ ، س + ٧ ص + ١٠ = ٠ .

(٣٧) اذا كانت المعادلتان ٥ س + ٢ ص ـ ٧ = صفر ، ٥ س + ٧ ص ـ ٣٦ = ٠ ، معادلتي ضلعين لمستطيل . ومعادلة احد اقطاره ٣ س + ٧ ص ـ ١٠ = ٠ ، اكتب معادلة ضلعيه الاخرين وقطره الاخر .

الجواب معادلتا ضلعي المستطيل ٢ س ـ ٥ ص + ٣ = ٠ ، ٢ س ـ ٥ ص ـ ٢٦ = ٠ معادلة قطره الاخر ٧ س ـ ٣ ص ـ ٣٣ = ٠ .

*(٣٨) النقاط أ (١ ، ـ ٢) ، ب (٥ ، ٤) ، حـ (ـ ٢ ، ٠) هي رؤوس مثلث اكتب معادلات المنصفات الداخلية والخارجية لزواياه .

الجواب معادلة المنصف الداخلي ٥ س + ص ـ ٣ = ٠ معادلة المنصف الخارجي س ـ ٥ ص + ٣ = صفر .

(٣٩) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ويبعد ببعدين متساويين عن النقطتين أ (ـ ٧ ، ٣) ، ب (١١ ، ـ ٥) .

تلميح للحل/ شروط التمرين تتحقق بالمستقيمين الذين احدهما يمر بالنقطـــــة ﴿ ٣ ، ٥) وبنصف قطعة المستقيم أ ، ب . والثاني المار من النقطة (٣ ، ٥) ويوازي المستقيم أ ب .

الجواب س + ص ـ ٨ = صفر ، ١١ س ـ ص ـ ٨ = صفر

(٤٠) عين الزاوية بين كل مستقيمين فيما يلي :ـ

(١) ٥ س ـ ص + ٧ = صفر ، ٣ س + ٢ ص = صفر

(٢) ٣ س ـ ٢ ص + ٧ = صفر ، ٢ س + ٣ ص ـ ٣ = صفر

(٣) س ـ ٢ ص ـ ٤ = صفر ، ٢ س ـ ٤ ص + ٣ = صفر

(٤) ٣ س + ٢ ص ـ ١ = صفر ، ٥ س ـ ٢ ص + ٣ = صفر

الاجوبة ط/٤ ، ط/٢ ، صفر ، ظا⁻¹ ١٦/١١ .

(٤١) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، ١) ويصنع زاوية قدرها ٤٥° مع المستقيم ٢ س + ٣ ص + ٤ = صفر .

الجواب س ـ ٥ ص + ٣ = صفر او ٥ س + ص ـ ١١ = صفر

(٤٢) اذا كانت النقطة أ (ـ ٤ ، ٥) هي رأس مربع قطره يقع على المستقيم ٧ س ـ ص + ٨ = صفر ، اكتب معادلات اضلاعه والقطر الاخر .

الجواب ٤ س + ٣ ص + ١ = ٠ ، ٣ س ـ ٤ ص + ٣٢ = ٠

٤ س + ٣ ص ـ ٢٤ = ٠ ، ٣ س ـ ٤ ص + ٧ = ٠

ومعادلة قطره الاخر س + ٧ ص ـ ٣١ = ٠

(٤٣) النقطة أ (١ ، ـ ١) هي مركز لمربع . احد اضلاعه على المستقيم س ـ ٢ ص + ١٢ = ٠ فجد معادلات المستقيمات التي تقع عليها بقية اضلاعه .

الجواب ٢ س + ص + ١٤ = صفر ، س ـ ٢ ص ـ ١٨ = ٠ ، ٢ س + ص ـ ١٦ = ٠

★ (٤٤) من النقطة أ (ـ ٢ ، ٣) سقط شعاع ضوئي فصنع مع الاتجاه الموجب للمحور الاول زاوية ظلها = ٣ وانعكس الضوء فجد معادلتي المستقيمين اللذين يقع عليهما الشعاع الساقط والشعاع المنعكس .

★ (٤٥) س ـ ٢ ص + ٥ = صفر هي معادلة الشعاع الساقط على المستقيم ٣ س ـ ٢ ص + ٧ = صفر ، وعند وصوله انعكس ثانية . فجد معادلة المستقيم الذى يقع عليه الشعاع المنعكس .

(٤٦) ٣ س + ٤ ص ـ ١ = ٠ ، س ـ ٧ ص ـ ١٧ = ٠ ، ٧ س + ص + ٣١ = ٠ هي معادلات اضلاع المثلث برهن ان هذا المثلث متساوى الساقين .

(٤٧) بين اى زوج من المستقيمات التالية متعامدة :ـ

(١) ٣ س ـ ص + ٥ = ٠ ، س + ٣ ص ـ ١ = ٠

(٢) ٣ س ـ ٤ ص + ١ = ٠ ، ٤ س ـ ٣ ص + ٧ = ٠

(٣) ٦ س ـ ١٥ ص + ٧ = ٠ ، ١٠ س + ٤ ص ـ ٣ = ٠

(٤) ٩ س ـ ١٢ ص + ٥ = ٠ ، ٨ س + ٦ ص ـ ١٣ = ٠

(٥) ٧ س ـ ٢ ص + ١ = ٠ ، ٤ س + ٦ ص + ١٧ = ٠

(٦) ٥ س ـ ٧ ص + ٣ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص ـ ٥ = ٠

حل التمرين بدون حساب ميل المستقيمات اعلاه (باستخدام تعريف المستوى الاقليدى) .

* (٤٨) برهن ان الصيغة التي يمكن بواسطتها تعيين الزاوية ى ، بين المستقيمين

$\text{أ}_1 \text{ س} + \text{ب}_1 \text{ ص} + \text{حـ}_1 = ٠$ ، $\text{أ}_2 \text{ س} + \text{ب}_2 \text{ ص} + \text{حـ}_2 =$ صفر هي

$$\text{ظا ى} = \frac{\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1}{\text{أ}_1 \text{أ}_2 + \text{ب}_1 \text{ب}_2}$$

(٤٩) عين الزاوية ى بين كل مستقيمين كما يلي :-

(١) $٣\text{س} - \text{ص} + ٥ = ٠$ ، $٢\text{س} + \text{ص} - ٧ = ٠$

(٢) $\text{س}\sqrt{٢} - \text{ص}\sqrt{٣} - ٥ = ٠$ ، $(٣ + \sqrt{٢})\text{ س} + (\sqrt{٦} - \sqrt{٣})$ ص + ٧ = صفر

(٣) $\text{س}\sqrt{٣} + \text{ص}\sqrt{٢} - ٢ = ٠$ ، $٢\text{س}\sqrt{٦} - ٣\text{ص} + ٣ =$ صفر

حل التمرين السابق بدون حساب الميل للمستقيمات اعلاه بل استعن بالتمرين السابق

الجواب ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°

* (٥٠) اذا كانت أ (− ١٠ ، ٢) ، ب (٦ ، ٤) ، راسين لمثلث ملتقى ارتفاعاته النقطة (٥ ، ٢) فجد احداثيي راسه الثالث .

الجواب حـ (٦ ، ٦)

* (٥١) اذا كانت أ (٣ ، − ١) ، ب (٥ ، ٧) راسين للمثلث أ ب حـ ، وملتقى ارتفاعاته النقطة ن (٤ ، − ١) اكتب معادلات اضلاع هذا المثلث .

الجواب $٤\text{س} - \text{ص} - ١٣ = ٠$ ، $\text{س} - ٥ = ٠$ ، $\text{س} + ٨\text{ص} + ٥ = ٠$

* (٥٢) في المثلث أ ب حـ معادلة ضلعه أ ب هي $٥\text{س} - ٣\text{ص} + ٢ =$ صفر ومعادلة ارتفاعه أ ن هي $٤\text{س} - ٣\text{ص} + ١ =$ صفر ، ومعادلة ارتفاعه ب ن هي $٧\text{س} + ٢\text{ص} - ٢٢ =$ صفر ، اكتب معادلتي ضلعيه الاخرين وارتفاعه الثالث .

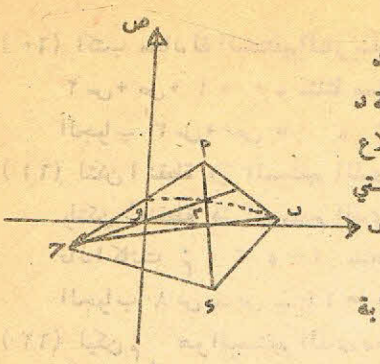
الجواب ب حـ : $٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٢٢ = ٠$ ، حـ أ : $٢\text{س} - ٧\text{ص} - ٥ =$ صفر ، حـ ن : $٣\text{س} + ٥\text{ص} - ٢٣ = ٠$

* (٥٣) جد معادلات اضلاع المثلث الذى أ (١ ، ٣) . اذا كان $\text{س} - ٢\text{ص} + ١ = ٠$ ، $\text{ص} - ١ =$ صفر معادلتي مستقيمين متوسطين له .

تلميح

(١) بين ان الراس أ لا يقع على احد المستقيمين المعلومين

(٢) جد نقطة تقاطع المستقيمين ولتكن م . وبما ان الراس أ والنقطة م معلومتين فاننا نستطيع ايجاد معادلة المستقيم المتوسط الثالث .



(٣) مد المستقيم ا م على استقامته الى نقطة د
بحيث أ م = م د وثم عين احداثي نقطة د
(٤) بين ان المضلع ب ا د ح م هو متوازي اضلاع
(لان اقطاره متناصفة) اكتب معادلـــتي
د ب ، د ح
(٥) عين احداثيات النقطتين ب ، ح
(٦) الان عرفت رؤوس المثلث وبذلك يمكن كتابة
معادلات اضلاعه ٠

الجواب س + ٢ ص ــ ٧ = ٠ ، س ــ ٤ ص ــ ١ = ٠ ، س ــ ص + ٢ = ٠

☆ (٥٤) جد معادلات اضلاع المثلث الذي احد رؤوسه ب (ــ ٤ ، ــ ٥) اذا كانـت
٥ س + ٣ ص ــ ٤ = ٠ ، ٣ س + ٨ ص + ١٣ = ٠ ، معادلتي ارتفاعين له ٠

الجواب ٣ س ــ ٥ ص ــ ١٣ = صفر ، ٨ س ــ ٣ ص + ١٧ = ٠ ، ٥ س + ٢ ص ــ ١ = ٠

☆ (٥٥) جد معادلات اضلاع المثلث أ ب ح ٠ اذا كانت ب (٢ ، ٦) راسا له ،
س ــ ٧ ص + ١٥ = ٠ ، ٧ س + ص + ٥ = ٠ ، معادلتي ارتفاع ومنصف زاويـــة
من زواياه على التوالي مرسومين من رأس واحد ٠

الجواب ٤ س + ٧ ص ــ ١ = ٠ ، ص ــ ٣ = ٠ ، ٤ س + ٣ ص ــ ٥ = ٠

☆ (٥٦) جد معادلات اضلاع المثلث الذي راسه ح (٤ ، ــ ١) اذا كان
٢ س ــ ٣ ص + ١٢ = ٠ ، ٢ س + ٣ ص = ٠ معادلتي ارتفاع ومستقيم متوســـط
على التوالي لهذا المثلث مرسومين من راس واحد ٠

الجواب ٣ س + ٧ ص ــ ٥ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص ــ ١٠ = ٠ ، ٩ س + ١١ ص + ٥ = ٠

☆ (٥٧) جد معادلات اضلاع المثلث أ ب ح اذا كانت ب (٢ ، ــ ١) راسا له مـــع
العلم ان ٣ س ــ ٤ ص + ٢٧ = ٠ ، س + ٢ ص ــ ٥ = ٠ على التوالي معادلتـا
ارتفاع ومنصف داخلي لزاوية مرسومين من راسين مختلفين ٠

الجواب ٤ س + ٧ ص ــ ١ = ٠ ، ص ــ ٣ = ٠ ، ٤ س + ٣ ص ــ ٥ = ٠

☆ (٥٨) جد معادلات اضلاع المثلث ا ب ح اذا كانت ب (٢ ، ــ ٧) راسا له مـــع
العلم ان ٣ س + ص + ١١ = ٠ ، س + ٢ ص + ٧ = ٠ ، معادلتا ارتفاع ،
ومستقيم متوسط على التوالي مرسومين من راسين مختلفين ٠

الجواب س ــ ٣ ص ــ ٢٣ = ٠ ، ٧ س + ٩ ص + ١٩ = ٠ ، ٤ س + ٣ ص + ١٣ = ٠

، (٥٩) جد معادلات اضلاع المثلث ا ب ح ٠ اذا كانت ا (٣ ، ــ ١) راسا لـــه
مع العلم ان س ــ ٤ ص + ١٠ = ٠ ، ٦ س + ١٠ ص ــ ٥٩ = ٠ على التوالي معادلتا
منصف داخلي لزاوية ومستقيم متوسط مرسومين من راسين مختلفين ٠

الجواب ٢ س + ٩ ص ــ ٦٥ = ٠ ، ٦ س ــ ٧ ص ــ ٢٥ = ٠ ،
١٨ س + ١٣ ص ــ ٤١ = ٠

(٦٠) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل ويصنع مع المستقيمين س ــ ص + ١٢ = ٠ ،
٢ س + ص + ٩ = ٠ ، مثلثا مساحته ٥ر١ وحدة مربعة ٠
الجواب ٣ س + ص = ٠ ، ٢٣ س + ٥ ٢ص = صفر
(٦١) لتكن ا نقطة ∋ المستقيم الذى معادلته ص = ٢ س ــ ٢
ولتكن ب نقطة ∋ المستقيم الذى معادلته س + ص + ٣ = ٠
فاذا كانت م (٣ ، ٠) منتصف قطعة المستقيم ا ب ٠ جد معادلة ا ب ٠
الجواب ٨ س ــ ص ــ ٢٤ = ٠
(٦٢) ليكن م$_{\text{١}}$ هو المستقيم الذى معادلته س ــ ٢ ص ــ ٣ = صفر ،
م$_{\text{٢}}$ هو المستقيم الذى معادلته س + ٢ ص + ٥ = صفر
برهن انه ∃ أ ∈ م$_{\text{١}}$ ، ب ∈ م$_{\text{٢}}$ ، أ ، ب ∉ م$_{\text{١}}$ ∩ م$_{\text{٢}}$
بحيث ان منتصف [$\overline{\text{أ ب}}$] هو النقطة (−٢ ، −١)
فاذا كان ∀ آ ∋ م$_{\text{١}}$ و ∀ ب ∋ م$_{\text{٢}}$ ، ا ، ب ∉ م$_{\text{١}}$ ∩ م$_{\text{٢}}$ فان منتصف
[$\overline{\text{آ ب}}$] هو النقطة (ــ ٣ ، ــ ١) ٠
(٦٣) لتكن ا نقطة ∋ المستقيم الذى معادلته ٢ س ــ ص + ٥ = صفر
ب نقطة ∋ المستقيم الذى معادلته ٢س ــ ص + ١٠ = صفر ،
فاذا كان طول [$\overline{\text{أ ب}}$] = $\sqrt{\text{١٠}}$ وحدة وكانت نقطة الاصل ∋ ا ب فجد
معادلة ا ب ٠
الجواب ٣ س + ص = ٠ او س ــ ٣ ص = ٠
(٦٤) جد قيمة كل من آ ، ب لكي يكون المستقيمان ا س + ٨ ص + ب = صفر ،
٢ س + ا ص ــ ١ = صفر
(١) متوازيين (٢) متساويين (٣) متعامدين
الاجوبة (١) أ = ــ ٤ ، ب ≠ ٢ أو ا = ٤ ، ب ≠ ــ ٢
(٢) أ = ــ ٤ ، ب = ٢ أو آ = ٤ ، ب = ــ ٢
(٣) أ = صفر ، ب اى عدد حقيقي ٠
(٦٥) اكتب معادلة المستقيمات التاليــة بدلالة المقطعين وارسم المستقيمات
(١) ٢ س + ٣ ص ــ ٦ = صفر ، (٢) ٤ س ــ ٣ ص + ٢٤ = ٠
(٣) ٢س + ٣ص ــ ٩ = ٠ (٤) ٣س ــ ٥ ص ــ ٢ = ٠ ،
(٥) ٥ س + ٢ ص ــ ١ = صفر
الاجوبة (١) $\frac{\text{س}}{\text{٣}} + \frac{\text{ص}}{\text{٢}} = \text{١}$ ، (٢) $\frac{\text{س}}{-\text{٦}} + \frac{\text{ص}}{\text{٨}} = \text{١}$
(٣) $\frac{\text{س}}{\frac{\text{٩}}{\text{٢}}} + \frac{\text{ص}}{\text{٣}} = \text{١}$ ، (٤) $\frac{\text{س}}{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} + \frac{\text{ص}}{-\frac{\text{٢}}{\text{٥}}} = \text{١}$ ، (٥) $\frac{\text{س}}{\frac{\text{١}}{\text{٥}}} + \frac{\text{ص}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \text{١}$

(٦٦) اكتب معادلة مستقيم المار بالنقطة (١ ، ١) ويكون مع المحورين مثلثا مساحته (٢) وحدة مربعة ٠

الجواب س + ص − ٢ = ٠ ، (١ + $\sqrt{٢}$) س + (١ − $\sqrt{٢}$) ص − ٢ = ٠ ،
(١ − $\sqrt{٢}$) س + (١ + $\sqrt{٢}$) ص − ٢ = صفر

(٦٧) عين نقاط تقاطع المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٣) مع المحورين اذا علمت انه يصنع مع المحورين مثلثا مساحته (٣) وحدات مربعة ٠

الجواب شروط التمرين تتحقق بالمستقيمين اللذين يقطعان المحورين في النقـاط (٢ ، ٠) ، (٠ ، −٣) ، او (−٤ ، ٠) ، (٠ ، $\frac{٣}{٢}$) ٠

(٦٨) بالنقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) مر بالمستقيم $\frac{س}{أ}$ + $\frac{ص}{ب}$ = ١ بحيث $س_{١}$ $ص_{١}$ > صفر ، (أ ≠ ح ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ح ، ب ≠ ٠) وصنع مع المحورين مثلثـا مساحته م ٠ ماهي العلاقة بين الكميات $س_{١}$ ، $ص_{١}$ م ٠ اذا كان المقطعـان أ ، ب متشابهين بالاشارة

الجواب م $\geq$ ٢ $س_{١}$ $ص_{١}$

(٦٩) عين ايا من المعادلات التالية هي معادلات مستقيمات بصيغتها العمودية

(١) $\frac{٣}{٥}$ س − $\frac{٤}{٥}$ ص − ٣ = صفر ، (٢) $\frac{٢}{٥}$ س − $\frac{٣}{٥}$ ص − ١ = صفر

(٣) $\frac{٥}{١٣}$ س − $\frac{١٢}{١٣}$ ص + ٢ = صفر ، (٤) − $\frac{٥}{١٢}$ س + $\frac{١٢}{١٣}$ ص − ٢ = صفر

(٥) − س + ٢ = صفر (٦) س − ٢ = صفر (٧) ص + ٢ = صفر ،

(٨) − ص − ٢ = صفر

(٧٠) فيما يلي حول الصيغة العامة لمعادلة المستقيمات ادناه الى الصيغة العمودية ٠ −

١) ٤ س − ٣ ص − ١٠ = ٠ (٢) $\frac{٤}{٥}$ س − $\frac{٣}{٥}$ ص + ١٠ = صفر

٣) ١٢ س − ٥ ص + ١٣ = ٠ (٤) س + ٢ = ٠ ، (٥) ٢ س − ص − ٥ = صفر

الجواب (١) $\frac{٤}{٥}$ س − $\frac{٣}{٥}$ ص − ٢ = ٠ ، (٢) − $\frac{٤}{٥}$ س + $\frac{٣}{٥}$ ص − ١٠ = صفر

(٣) $\frac{١٢}{٣}$ س + $\frac{٥}{١٣}$ ص − ١ = صفر ، (٤) − س − ٢ = صفر

(٥) $\frac{٢}{٥}$ س − $\frac{١}{٥}$ ص − ١ = صفر

★ (٧١) عين الزاوية (د) التي يصنعها العمود النازل من نقطة الاصل على المستقيمات المبينة معادلاتها ادناه مع الاتجاه الموجب للمحور الاول ٠ ثم جد طول العمود (ع) وعند تعيينك مقدار الزاوية وطول العمود ارسم المستقيمات معتبرا هـ = ٣٠° ، حـ = ٢ في الحالتين الاخيرتين فيما يلي :-

(١) س – ٢ = صفر ، (٢) س + ٢ = صفر ، (٣) ص – ٣ = صفر ،

(٤) ص + ٣ = صفر ، (٥) س √٣ + ص – ٦ = صفر

(٦) س – ص + ٢ = صفر (٧) س + ص √٣ + ٢ = صفر ،

(٨) س جتا هـ – ص جا هـ – حـ = صفر عندما تكون هـ حادة ،

(٩) س جتا هـ + ص جا هـ + حـ = صفر ، هـ حادة

الاجوبة (١) د = صفر° ، ع = ٢ (٢) د = ط ، ع = ٢ (٣) د = ط/٢ ، ع = ٣

(٤) د = ط/٣ ، ع = ٣ (٥) د = ط/٦ ، ع = ٣ . (٦) د = ط/٤ ، ع = ٢

(٧) د = ٢/٣ ط ، ع = ١ (٨) د = – هـ ، حـ = ٢ (٩) د = هـ – ط ، ع = حـ

(٧٢) فيما يلي احسب المسافة بين النقطة والمستقيم المبينة معادلته ازاءها في المستوى الاقليدي وكذلك بين اذا كانت النقطة ونقطة الاصل في جانب واحد او في جانبين مختلفين من المستقيم

(١) أ (٢ ، –١) ، ٤ س + ٣ ص + ١٠ = صفر

(٢) ب (– ، –٣) ، ٥ س – ١٢ ص – ٢٣ = صفر

(٣) حـ (–٢ ، ٢) ، ٣ س – ٤ ص – ٢ = صفر

(٤) د (١ ، –٢) ، س – ٢ ص – ٥ = صفر

الاجوبة ٢ ، ١ ، ٤ ، صفر على الترتيب

تلميح / اذا كانت اشارة حـ ، اشارة أ س١ + ب ص١ + حـ متشابهة فان النقطة (س١ ، ص١) تقع في جهة نقطة الاصل ٠ واذا اختلفت اشارتاهما فان النقطة (س١ ، ص١) تقع في الجهة المخالفة لنقطة الاصل ٠

(٧٣) فيما يلي بين فيما اذا كانت النقطة (١ ، –٣) ونقطة الاصل في جانب واحد او في جانبين مختلفين من كل مستقيم من المستقيمات التالية :-

(١) ٢ س – ص + ٥ = صفر (٢) س – ٣ ص – ٥ = صفر (٣) ٣ س + ٢ ص – ١ = صفر

(٤) س – ٣ ص + ٢ = صفر (٥) ١٠ س + ٢٤ ص + ١٥ = صفر

الاجوبة (١) في جانب واحد (٢) في جانبين مختلفين (٣) في جانب واحد

(٤) في جانب واحد (٥) في جانبين مختلفين ٠

(٧٤) النقطة (٢ ، — ٥) هي راس مربع احد اضلاعه على المستقيم الذى معادلتـــه
س — ٢ ص — ٧ = صفر احسب مساحة هذا المربـــع .
الجواب ٥ وحدات مربعة
(٧٥) اذا كانت ٣ س — ٢ص — ٥ = صفر ، ٢ س + ٣ ص + ٧ = صفر معادلتي ضلعـــين
من اضلاع مستطيل والذى (— ٢ ، ١) راس له . احسب مساحته .
الجواب ٦ وحدات مربعـــه
★ (٧٦) برهن ان المستقيم ٢س + ص + ٣ = صفر يقطع قطعة المستقيم المحصورة بـــــين
النقطتين أ (— ٥ ، ١) ، ب (٣ ، ٧)
(٧٧) رؤوس المثلث أ ب حـ هي أ (— ١٠ ، — ١٣) ، ب (٢ ، ٣) ،
حـ (٢ ، ١) جد طول العمود النازل من الراس ب على المستقيم المتوسط المرسوم
في حـ .
الجواب ٤ وحدات
(٧٨) أ ب حـ مثلث معادلات اضلاعه أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب
س + ١١ص — ٢٢ = ٠ ، ٥س — ٢١ص + ٧ = ٠ ، ٤س — ٣٣ص + ١٤٦ = صفر
جد بعد مركز الثقل للمثلث عن الضلع ب حـ
(الجواب (٣) وحدات) .
(٧٩) احسب البعد بين كل مستقيمين متوازيين من المستقيمات التالية
(١) ٣س — ٤ ص — ١٠ = صفر ، ٦ س — ٨ ص + ٥ = صفر
(٢) ٥ س — ١٢ ص + ٢٦ = صفر ، ٥ س — ١٢ ص — ١٣ = صفر
(٣) ٤ س — ٣ص + ١٥ = صفر ، ٨ س — ٦ ص + ٢٥ = صفر
(٤) ٢٤س — ١٠ص + ٣٩ = صفر ، ١٢س — ٥ص — ٢٦ = صفر
الاجوبة ٥ر٢ ، ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٥ر٣ .
(٨٠) ضلعان من مربع واقعان على ٥ س — ١٢ص — ٦٥ = صفر ، ٥س — ١٢ص + ٢٦ = صفر ،
وما مساحته ؟
الجواب (٤٩) وحدة مربعة
(٨١) برهن ان المستقيم ٥ س — ٢ص — ١ = صفر ، يوازى كلا من المستقيمين ٥س — ٢ص +
٧ = صفر ، ٥س — ٢ص — ٩ = صفر ، ويمر بمنتصف المسافة بينهما .
★ (٨٢) بين ان المستقيم الذى معادلته ١٠س + ٥ ص — ٣ = صفر يقع بين المستقيمين
٢س + ٢ص + ٥٠ = صفر ، ٢س + ٢ص — ٩ = صفر . وجد النسبة التي يقســـم
بها المستقيم البعد بين المستقيمين .
الجواب النسبة ٢ : ٣
(٨٣) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٧) ويبعد عن النقطة (١ ، ٢) ببعد
مقداره (٥) وحدات .
الجواب ٥ س + ١٢ص — ٩٤ = صفر او ص — ٧ = صفر

★ (٨٤) برهن انه يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة (٧ ، – ٢) بحيث بعده عن النقطة (٤ ، – ٦) يساوى (٥) وحدات . وجد معادلة هذا المستقيم .

الجواب ٣ س + ٤ ص – ١٣ = ٠

(٨٥) ما هي المجموعة {م : م مستقيم يمر بالنقطة (٤ ، – ٥) بحيث بعده عن النقطة (– ٢ ، ٣) يساوى ١٢ وحدة }

الجواب ∅

(٨٦) جد معادلة المجموعة هـ = {أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم ٣س – ٤ص – ١٠ = صفر يساوى ٣ وحدات }

الجواب: { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ٨ س – ٥ اص + ٩ = ٠ }

(٨٧) جد معادلة المستقيم الذى يوازى المستقيم ٣س – ٤ص + ٥ = صفر ، والذى يبعد عنه بمقدار (٣) وحدات

الجواب ٣س – ٤ص – ٢٥ = صفر ، ٣ س – ٤ص + ٥ = صفر

★ (٨٨) النقطتان أ (٢ ، ٠) ، ب (– ١ ، ٤) هما راسان متجاوران لمربع . جد معادلات اضلاعه .

الجواب شروط التمرين تتحقق بمربعين معادلات اضلاع المربع الاول هي :-
٤س + ٣ص – ٨ = ٠ ، ٤س + ٣ص + ١٧ = ٠ ، ٣س – ٤ص + ١٩ = ٠
، ٣س – ٤ص – ٦ = ٠ ومعادلات اضلاع المربع الثاني هي
٤س + ٣ص – ٨ = ٠ ، ٤س + ٣ص – ٣٣ = ٠ ، ٣س – ٤ص – ٦ = صفر ،
٣ب – ٤ ص + ١٩ = ٠

★ (٨٩) النقطة أ (٥ ، – ١) هي راس مربع ، احد اضلاعه يقع على المستقيم .
٤س – ٣ ص + ٧ = صفر ، جد معادلات بقية اضلاعه .

الجواب شروط التمرين تتحقق بمربعين معادلات بقية اضلاع المربع الاول هي :-
٣س + ٤ص – ١١ = ٠ ، ٤س – ٣ص – ٢٣ = ٠ ، ٣س – ٤ص – ٢٧ = ٠
ومعادلات بقية اضلاع المربع الثاني هي :-
٣س + ٤ص + ٣ = ٠ ، ٤س – ٣ص – ٢٣ = ٠ ، ٣س + ٤ص + ٥ = صفر

(٩٠) المعادلتان ٤س – ٣ص + ٣ = صفر ، ٤س – ٣ص – ١٧ = صفر هما معادلتي ضلعين من اضلاع مربع والنقطة ا (٢ ، – ٣) هي احد روؤسه جد معادلتي الضلعين الآخرين

الجواب ٣ س + ٤ص + ٦ = صفر ، ٣س + ٤ص – ١٤ = ٠
او ٣س + ٤ص + ٦ = صفر ، ٣س + ٤ص + ٢٦ = ٠

* (٩١) المعادلتان ٥ س+ ١٢ ص – ١٠= صفر ، ٥ س + ١٢ ص+ ٢٩ = صفر همـا
معادلتا ضلعين من اضلاع مربع والنقطة (– ٣ ، ٥) تقع على احد ضلعيه جـد
معادلتي الضلعين الاخرين .
الجواب ١٢س – ٥ ص+ ٦١ = صفر ، ١٢ س – ٥ ص+ ٢٢= صفر
او ١٢س – ٥ ص+ ٦١ = صفر ، ١٢س – ٥ ص – ١٠٠ = صفر .

(٩٢) اذا كان بعد النقطة ن ($س_1$ ، $ص_1$) عن المستقيمين
٥س – ١٢ ص – ١٣= صفر ، ٣ س – ٤ ص – ١٩ = ٠ هو على التوالي
+ ٣ ، + ٥ . فجد احداثيي نقطة ن
الجواب : ن(٢ ، ٣)

* (٩٣) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (– ٢ ، ٣) والذى يبعد ببعد متساو
عن النقطتين (٥ ، – ١) ، (٣ ، ٧) .
الجواب ٤ س + ص + ٥ = ٠ ، ص – ٣ = ٠ .

(٩٤) جد معادلة كل من المجموعات التالية :–
$هـ_1$ = { أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم ٣ س – ص+ ٧ = ٠ ، يساوى بعدهـا
عن المستقيم ٣ س – ص – ٣ = صفر }
$هـ_2$ = { أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم س – ٢ص+ ٣ = ٠ ، يساوى بعدها عـن
المستقيم س – ٢ ص+ ٧ = ٠ }
$هـ_3$ = { أ : أ نقطة بعدها عن المستقيم ٥س – ٢ص+ ٦ = ٠ يساوى بعدها عـن
المستقيم ١٠س – ٤ ص+ ٣= ٠ }
الاجوبة (١) { (س ، ص) : ٣س – ص+ ٢= ٠ }
(٢) { (س ، ص) : س – ٢ص + ٥ = ٠ }
(٣) { (س ، ص) : ٢٠س – ٨ص – ٩ = ٠ }

(٩٥) جد معادلة كل من المجموعات التاليـة :–
$هـ_1$ = { أ : أ نقطة المسافة بين أ والمستقيم س – ٣ص+ ٥ = ٠ تساوى المسافـة
بين أ والنقطة ٣س – ص – ٢ = ٠ }
$هـ_2$ = { أ : أ نقطة المسافة بين أ والمستقيم س – ٢ص – ٣= ٠ تساوى المسافة بين
أ والمستقيم ٨ ص + ١٣ = ٠ }

$هـ_3$ = { أ : أ نقطة المسافة بين أ والمستقيم ٣ س+ ٤ ص – ١ = ٠ تساوى
المسافة بين أ والمستقيم ٥ س+ ١٢ ص – ٢ = ٠ }
الاجوبة $هـ_1$ { (س ، ص) : ٤س – ٤ص+ ٣ = ٠ او ٢ س+ ٢ص – ٧ = ٠ } .

$هـ_{٢} = \{(س، ص) : ٤س + ١ = ٠$ او $٨ص + ١٣ = ٠\}$

$هـ_{٢} = \{(س، ص) : ٤س + ١ = ٠$ او $٨ص + ١٣ = ٠\}$

$هـ_{٣} = \{(س، ص) : ٤١س - ٨ص - ٣ = ٠$ او $س + ١١٢ص - ٢٣ = ٠\}$

ملاحظة ـ ان المعادلة ٤ س ـ ٤ ص + ٣ = ٠ او المعادلة ٢س + ٢ص ـ ٧ = ٠
تمثل معادلة المستقيم المنصف الداخلي للزاوية او المنصف الخارجي لهما ٠

* (٩٦) اكتب معادلتي المستقيمين اللذين يمر كل منهما بالنقطة (٢ ، ـ ١) ويصنع كل منهما مع المستقيمين ٢س ـ ص + ٥ = ٠ ، ٣ س + ٦ ص ـ ١ = ٠ ، مثلثا متساوي الساقين ٠

تلميح / جد معادلتي المنصفين للزاوية بين المستقيمين المعلومين وبما ان هذين المستقيمين المنصفين عمودان على المستقيمين المطلوبين (ميل ونقطة ، فجد معادلة كل منهما) ٠

الجواب س ـ ٣ ص ـ ٥ = ٠ ، ٣ س + ص ـ ٥ = ٠

* ملاحظة/ (معادلة مجموعة المستقيمات المارة من نقطة تقاطع مستقيمين)

معادلة مجموعة المستقيمات المارة بالنقطة ن ، حيث ن نقطة تقاطع المستقيمين $أ_{١}س + ب_{١}ص + حـ_{١} = ٠$ ، $أ_{٢}س + ب_{٢}ص + حـ_{٢} = ٠$ هي

$ل_{١}(أ_{١}س + ب_{١}ص + حـ_{١}) + ل_{٢}(أ_{٢}س + ب_{٢}ص + حـ_{٢}) =$ صفر ٠٠٠٠ (١)

حيث $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ عددان حقيقيان لا يساويان معا صفرا ٠ وتسمى النقطة ن الراس الذى تشترك به المستقيمات ٠

اذا كان $ل_{١} \neq$ صفرا تقسم طرفي المعادلة (١) على $ل_{١}$ ونرمز الى $\frac{ل_{٢}}{ل_{١}} = ل$

فان المعادلة (١) تصبح

$أ_{١}س + ب_{١}ص + حـ_{١} + ل(أ_{٢}س + ب_{٢}ص + حـ_{٢}) =$ صفر وهي تمثل المعادلة العامة لاى مستقيم مار بنقطة تقاطع مستقيمين عدا المستقيم عندما $ل_{١} =$ صفر

اى عدا المستقيم $أ_{٢}س + ب_{٢}ص + حـ_{٢} =$ صفر

---

(٩٧) اذا كانت $ل_{١}(٢س + ٣ص - ١) + ل_{٢}(س - ٢ص - ٤) =$ صفرا هي المعادلة العامة لمجموعة المستقيمات المارة من نقطة تقاطع مستقيمين ٠ فجد احداثي نقطة التقاطع هذه ٠

الجواب (٢ ، ـ ١)

* (٩٨) جد معادلة المستقيم الذى ينتمي الى مجموعة المستقيمات التي معادلتها :—

ل١ (س + ٢ص — ٥) + ل٢ (٣س — ٢ص + ١) = ٠ والذى

(١) يمر بالنقطة (٣ ، ١) ، يمر بنقطة الاصل (٣) يوازى المحور الاول

(٤) يوازى المحور الثاني (٥) يوازى المستقيم ٤س + ٣ص — ٥ = ٠ ،

(٦) عمود على المستقيم ٢س + ٣ص + ٧ = ٠

الاجوبة / ٣س + ٢ص — ٧ = ٠ ، ٢س — ص = ٠ ، ص — ٢ = ٠ ، س — ١ = ٠

، ٤س + ٣ص — ١٠ = ٠ ، ٣س — ٢ص + ١ = ٠

(٩٩) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٣س — ٢ص + ٥ = ٠ ،

٤س + ٣ص — ١ = ٠ ، والذى يقطع من محور الصادات جزء طوله (٣) وحدات

الجواب ٧٤س + ١٣ص + ٣٩ = ٠

(١٠٠) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ص — ٢ = ٠ ،

س — ٥ص — ٢٣ = ٠ ، والذى ينصف قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين

(٥ ، —٦) ، (—١ ، —٤) .

الجواب س — ص — ٧ = ٠

(١٠١) لتكن ل١ (٣س — ٤ص — ٣) + ل٢ (٢س + ٣ص — ١) = ٠ معادلة مجموعة

المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين . اكتب معادلة المستقيم المار من مركز ثقل

صفيحة مثلثة منتظمة رؤوسها أ (—١ ، ٢) ، ب (٤ ، —٤) ، حـ (٦ ، —١)

والذى ينتمي الى هذه المجموعة .

الجواب ٧س + ٩ص — ٤ = صفر

(١٠٢) لتكن أ ∈ المستقيم الذى معادلته س + ٢ص + ٤ = ٠ ولتكن ب ∈

المستقيم الذى معادلته س + ٧ص — ١ = صفر اكتب معادلة أب اذا علمت انه ينتمي

الى المجموعة

ل١ (٣س — ٢ص — ١) + ل٢ (٤س — ٥ص + ٨) = صفر

(١٠٣) مثلث معادلات اضلاعه س + ٢ص — ١ = صفر ، ٥س + ٤ص — ١٧ = ٠

س — ٤ص + ١١ = ٠ ، اكتب معادلات ارتفاعاته .

الجواب ٤س — ٥ص + ٢٢ = ٠ ، ٤س + ص — ١٨ = ٠ ، ٢س — ص + ١ = صفر .

* (١٠٤) لتكن ل١ (٥س + ٣ص — ٧) + ل٢ (٣س + ١٠ص + ٤) = صفرا معادلة لمجموعة

المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين فاذا كان المستقيم أس + ٥ص + ٩ = ٠

(حيث أ ∈ ح) ينتمي الى هذه المجموعة فما قيمة أ وعين احداثي الـرأس

المشترك لمجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين

الجواب أ = —٢ ، (٢ ، —١) .

* (١٠٥) لتكن $ل_{١}$ (٢س ـ ٣ص + ٢٠) + $ل_{٢}$ (٣س + ٥ص ـ ٢٧) = صفرا معادلة مجموعة المستقيمات فاذا كان الراس المشترك لهذه المستقيمات هو راس مربع معادلة احد قطريه س + ٧ص ـ ١٦ = صفر فاكتب معادلات اضلاعه وقطره الاخر ٠

الجواب معادلات اضلاعه ٤س + ٣ص ـ ١٤ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص + ٢٧ = صفر ، ٣س ـ ٤ص + ٢ = ٠ ، ٤س + ٣ص + ١١ = ٠ ومعادلة قطره الاخر ٧س ـ ص + ١٣ = ٠

(١٠٦) لتكن $ل_{١}$ (٢س + ٥ص + ٤) + $ل_{٢}$ (٣س ـ ٢ص + ٢٥) = صفرا معادلة لمجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين فاكتب معادلة المستقيم الذى ينتمي الى هذه المجموعة ويقطع من المحورين جزئين متساويين ٠

الجواب س + ص + ٥ = صفر

(١٠٧) لتكن $ل_{١}$ (٢١س + ٨ص ـ ١٨) + $ل_{٢}$ (١١س + ٣ص + ١٢) = صفرا هي معادلة مجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين ٠ جد معادلة المستقيم الذى ينتمي الى هذه المجموعة ويقطع من المحورين مثلثا مساحته (٩) وحدات مربعة ٠

الجواب ٢س + ص ـ ٦ = ٠ ، ٩س + ٢ص + ١٨ = ٠

(١٠٨) لتكن $ل_{١}$ (٢س + ص ـ ٦) + $ل_{٢}$ (س ـ ٢ص ـ ٣) = صفرا ، مجموعة المستقيمات المارة بنقطة تقاطع مستقيمين ٠ برهن انه يوجد على الاقل مستقيم واحد ينتمي الى هذه المجموعة والذى يبعد عن النقطة (٢ ، ـ ٣) بمقدار ($\sqrt{١٠}$) وحدة ٠ ثم جد معادلة هذا المستقيم ٠

الجواب ٣س ـ ص + ١ = ٠

(١٠٩) لتكن هـ = { (س ، ص) : (س ، ص) $\in$ ح × ح ، أس + بص + جـ = صفرا ، أ ، ب لايساويان معا صفرا ، أ ، ب ، جـ $\in$ ح } برهن ان هـ تمثل معادلة مجموعة نقاط الخط المستقيم ٠

(١١٠) المستقيم الذى معادلته س ـ ٢ص = ٨ يقطع محور السينات والصادات في النقطتين أ ، ب على الترتيب ، نقطة حـ تقسم أب من الداخل بنسبة ١ : ٣ فاذا اقيم من حـ عمود على أب فانه يقطع محور السينات في نقطة د ٠ جد احداثيي النقطة د ٠

(١١١) المستقيم ٣س + ٥ص ـ ١٥ = ٠ ، يقطع محور السينات في نقطة حـ ويقطع محور الصادات في نقطة د فاذا اقيم من منتصف حـ د عمود عليه ٠ فاثبت ان محوري الاحداثيات يحصران بينهما جزءا من هذا العمود طوله $\frac{٨\sqrt{٣٤}}{١٥}$

(١١٢) اثبت ان المستقيمات ٥س ـ ٢ص + ٦ = ٠ ، ٢س + ٥ص = ١٥ ، ٣س ـ ص + ٣ = ٠ ، تتقاطع في نقطة واحدة ٠

(١١٣) برهن ان المستقيمين ٢س + ص + ١ = صفرا ، س – ٢ص + ٨ = ٠ يتقاطعان على المستقيم المار بالنقطتين (– ٢ ، ٢) ، (– ٢ ، ٣) .

★(١١٤) اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ٢ص – ٨ = ٠ ، ٣س + ٢ص + ٥ = صفر والذى يصنع مع المستقيم ٢س + ٣ص – ٧ = ٠ زاوية مقدارها ٤٥°

★(١١٥) في المثلث أب حـ الارتفاعات أد ، ب ن والضلع اب معرفة بالمعادلات التالية على التوالي س + ٥ص – ٣ = ٠ ، س + ص – ١ = ٠ ، س + ٣ص – ١ = ٠ اكتب معادلتي الضلعين الاخرين ومعادلة الارتفاع حـ ن .

الجواب ب حـ : ٥س – ص – ٥ = ٠ ، أحـ = س – ص + ٣ = ٠ ، حـ ن : ٣س – ص – ١ = ٠

(١١٦) مستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٣) ويقطع من محورى الاحداثيات جزئين مجموع طوليهما (٨) وحدات اكتب معادلة ثم بين ان للمسالة حلين .

الجواب ٣س + ص – ٦ = ٠ ، س + ص – ٤ = ٠ .

(١١٧) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٥) والجزء المحصور منه بين محورى الاحداثيات يقسم بهذه النقطة من ٣ : ٢ على الترتيب

الجواب ٥س – ٦ص + ١٠ = ٠

(١١٨) المستقيم اب يمر بالنقطة (٢ ، ١) ويقطع من محور الصادات جزء طوله (٥) وحدات والمستقيم حـ د يمر بالنقطة (٥ ، – ٢) ويقطع من محور السينات جزء طوله (٤) وحدات برهن ان اب // حـ د . وجد البعد بينهما .

الجواب $\frac{٣\sqrt{٥}}{٥}$

(١١٩) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ١) ويبعد (١) وحدة عن نقطة الاصل

الجواب: $\sqrt{٣}$س + ص = ٢ ، ص = ١

(١٢٠) جد مساحة الدائرة التي مركزها النقطة (٣ ، – ٤) والتي تمس المستقيم ٥س + ١٢ص + ٧ = ٠ .

الجواب $\frac{٨٨}{٧}$ وحدة مربعة

(١٢١) جد مساحة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم ٣س + ص – ٦ = ٠ ، والتي تمر بالنقطتين (٦ ، ٤) ، (– ٢ ، ٠)

الجواب (٤٠ ط) وحدة مربعة .

(١٢٢) اب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ راسه ا يقع على محور الصادات وراسه ب يقع على محور السينات ، حـ (٤ ، ٦) وضلعه ا حـ يقع على المستقيم س + ٢ص – ١٦ = ٠ جد مساحة المثلث ا ب حـ

الجواب (١٥) وحدة مربعة .

(١٢٣) النقطة ب (٢ك ، هـ) تقع على المستقيم س – ص – ٤ = ٠ ، والنقطة ا (هـ ، ك) تقع على المستقيم ٣س + ٢ص – ١٢ = ٠ ، جد معادلة اب علماً ان هـ ، ك ∈ ح

الجواب س + ٤ص – ١٦ = ٠

(١٢٤) لتكن كل من ا (٦ ، ٨) ، ب (–٢ ، ٤) ، حـ (هـ – ٣ ، ن – ٤) نقطة ∈ مستقيم واحد بحيث ان ٣ [ا ب] = ٤ [ب حـ] فجد معادلة المستقيم المار من النقطة (٢هـ ، ن) والعمود على المستقيم اب . علما ان هـ ، ن ∈ ح

الجواب ٢س + ص + ١٩ = ٠

(١٢٥) لتكن م$_1$ = { (س ، ص) : س + ص – ٤ = ٠ }

ولتكن م$_2$ = { (س ، ص) : ٣س – ص + ١٢ = صفر }

ولتكن م$_3$ = { (س ، ص) : ٣س + ٤ص – ١٥ = صفر }

اذا علمت ان ا ∈ م$_1$ ∩ م$_2$ ،

ب (٢ + هـ ، ٢ – هـ) ∈ م$_3$ حيث هـ ∈ ح

حـ (ك ، ٣ك + ٨) ∈ م$_1$ حيث ك ∈ ح

جد

(١) معادلة المستقيم المار من حـ ومن نقطة الوحدة للمحور الثاني

(٢) معادلة المستقيم المار من حـ والموازي للمحور الثاني

(٣) النسبة التي يقسم بها المستقيم الذى معادلته ص = ٣س – ١٦ قطعة المستقيم أ ب وما نوع التقسيم .

الجواب ٤س + ص – ١ = ٠ ، س = –١ ، $\frac{-٧}{٤}$ (من الخارج)

(١٢٦) المستقيم الذى معادلته ٤س + ٣ص = ٢٥ يقطع المستقيم أهـ في نقطة هـ حيث ا (٥ ، ٠) ويقطع المستقيم ب ك في نقطة ك حيث ك (–٥ ، ٠). فاذا كانت المسافة بين هـ ، ك = ٥ وحدات فجد معادلة كل من ا هـ ، ب ك . علماً ان ميل كل من المستقيمين أ هـ ، ب ك هو ل حيث ل ∈ ح

الدائـــــــــــرة

اذا كانت م نقطة في المستوى الاقليدى ، فانّ مجموعة كل النقاط المتساوية البعـــد عن م تسمى دائرة . تسمى م مركز الدائرة . واى من هذه الابعاد المتساوية يسمى نصـف قطر الدائرة وباختصار الدائرة هي

{ أ : أ نقطة في المستوى . م‾أ = نق ، نق ∋ ح⁺ }

ملاحظات/

(١) الشرط اللازم والكافي لكي تقع النقطة أ (س ، ص) على الدائرة التي مركزها نقطـــة الاصل ونصف قطرها نق هو

س ٢ + ص ٢ = نق ٢ . . . . (١)

اى ان معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها نق هي

س٢ + ص٢ = نق ٢

(٢) الشرط اللازم والكافي لكي تقع النقطة أ (س ، ص) على الدائرة التي مركزها (هـ ، ك) ونصف قطرها نق هو

(س ــ هـ) ٢ + (ص ــ ك) ٢ = نق ٢ . . . . . (٢)

اى ان معادلة الدائرة التي مركزها (هـ ، ك) ونصف قطرها نق هي

(س ــ هـ)٢ + (ص ــ ك)٢ = نق ٢

(٣) معادلة كل دائرة تكون بالصورة التالية :ــ

س٢ + ص٢ + أس + ب ص + حـ = ٠ . . . . . (٣)

الا ان العكس ليس صحيحا على وجه العموم فاذا كان

(أ) أ٢ + ب٢ ــ ٤ حـ > صفر فان المعادلة (٣) تمثل دائرة مركزها

(ــأ/٢ ، ــب/٢) = (هـ ، ك) ونصف قطرها √(هـ٢ + ك٢ ــ حـ)

(ب) أ٢ + ب٢ ــ ٤ حـ = صفرا فان المعادلة (٣) تمثل مجموعة احادية هي { (ــأ/٢ ، ــب/٢) } .

(حـ) أ٢ + ب٢ ــ ٤ حـ صفر فان المعادلة (٣) تمثل مجموعة خالية

(٤) لتكن د هي الدائرة التي مركزهــا (هـ ، ك) ونصف قطرها نق فان

(أ) د تمس محور السينات ⟺ نق = | ك |

(ب) د تمس محور الصادات ⟺ نق = | هـ |

(جـ) د تمس المحورين الاحداثيين ⟺ نق = | هـ | = | ك |

(٥) العلاقة بين المستقيم والدائرة د .

(أ) م يمس د ⟺ م ∩ د = مجموعة احادية

او م يمس د ⟺ المسافة بين مركز الدائرة د والمستقيم م في المستوى الاقليدى = نق

(ب) م يقطع د في نقطتين ⟺ م ∩ د = مجموعة ذات عنصريـــن .

او م يقطع د في نقطتين ⟺ المسافة بين مركز الدائرة د والمستقيم م في المستوى الاقليدى < نق

(جـ) م لايقطع ولا يمس د ⟺ م ∩ د = مجموعة خالية

م لايقطع ولايمس د ⟺ المسافة بين مركز الدائرة د والمستقيم م في المستوى الاقليدى > نق .

(٦) العلاقة بين الدائرة د والنقطة أ

(أ) النقطة أ تقع على الدائرة د ⟺ المسافة بين مركز الدائـرة والنقطة أ = نق

(ب) النقطة أ تقع داخل الدائرة د ⟺ المسافة بين مركز الدائرة د والنقطة أ < نق

(جـ) النقطة أ تقع خارج الدائرة ⟺ المسافة بين مركز الدائرة د والنقطة أ > نق

(٧) العلاقة بين دائرتين

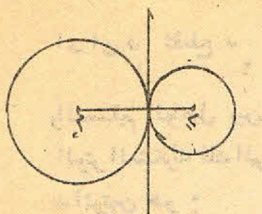
العلاقة بين الدائرة د$_{١}$ والتي مركزها م$_{١}$ ونصف قطرها نق$_{١}$ والدائرة د$_{٢}$ والتي مركزها م$_{٢}$ ونصف قطرها نق$_{٢}$

(أ) تماس دائرتين

د$_{١}$ تمس د$_{٢}$ ⟺ د$_{١}$ ∩ د$_{٢}$ = مجموعة احادية

اى انه يقال للدائرة د$_{١}$ انها تمس الدائرة د$_{٢}$ اذا اشتركتا بنقطة واحدة

وواحدة فقط والعكس بالعكس ، وتسمى النقطة المشتركة بنقطة تماس الدائرتين ، ويسمى المماس لهاتين الدائرتين عند نقطة التماس بالمماس المشترك لهما عند نقطة التماس .



اولا — تماس دائرتين من الخارج

$د_1$ تمس $د_2$ من الخارج $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ = $نق_1$ + $نق_2$ أى ان الدائرة $د_1$ تمس $د_2$ من الخارج اذا كان طول خط المركزين يساوى مجموع نصفي قطريهما والعكس بالعكس .

(شكل ١ـ٦)

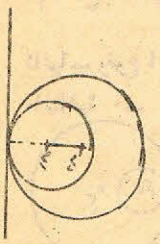
وان نقطة التماس تقسم المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ من الداخل بنسبة $نق_1$: $نق_2$

ولايجاد معادلة المماس المشترك للدائرتين عند نقطة التماس نتبع مايلي

١ـ نجد ميل المستقيم الواصل بين $م_1$ ، $م_2$

٢ـ بما ان المماس عمود على المستقيم الواصل بين $م_1$ ، $م_2$ فان ميل المماس = المقلوب السالب لميل $م_1 م_2$

٣ـ من الميل ونقطة التماس نجد معادلة المماس المشترك عند نقطة التماس



ثانيا ـ تماس دائرتين من الداخل

$د_1$ تمس $د_2$ من الداخل $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ = $نق_1$ ـ $نق_2$ وان نقطة التماس تقسم المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ من الخارج بنسبة $نق_1$: $نق_2$

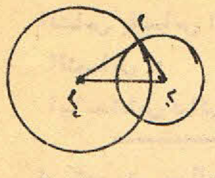
(شكل ١ـ٧)

ولايجاد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما نتبع نفس الطريقة الواردة في حالة التماس من الخارج .

(ب) تقاطع دائرتين

$د_1$ تقطع $د_2$ $\Longleftrightarrow$ $د_1 \cap د_2$ = مجموعة ذات عنصرين

اى ان $د_1$ تقطع $د_2$ اذا اشتركتا بنقطتين



(شكل ١ـ٨)

والمستقيم الواصل بين هاتين النقطتين يسمى الوتر المشترك للدائرتين . وشرط تقاطع دائرتين هو :

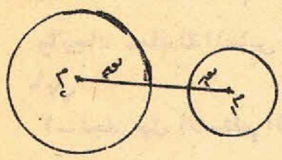
$د_1$ تقطع $د_2$ $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $<$ $نق_1 + نق_2$

والمسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $>$ $|نق_1 - نق_2|$

(جـ) الدائرتان غير متماستين وغير متقاطعتين

$د_1$ لاتقطع ولاتمس $د_2$ $\Longleftrightarrow$ $د_1 \cap د_2 = \emptyset$

مجموعة خالية ويمكن تقسيم هذه الحالة كما يلي :ـ



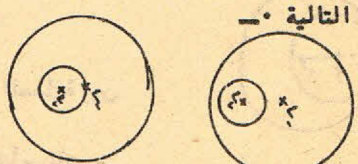
(شكل ١ـ٩)

اولاـ تباعد الدائرتين اى كل منهما تقطع بتمامها خارج الاخرى) اى كما في الشكل المجاور

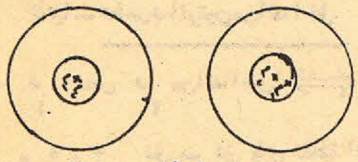
وشرط تباعد دائرتين هو :ـ

$د_1$ تقع بتمامها خارج $د_2$ $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $>$ $نق_1 + نق_2$

ثانياـ وقوع احدى الدائرتين بتمامها داخل الاخرى اى كما في الاشكال التالية :ـ



(شكل ١ـ١٠)



(شكل ١ـ١١)

وشرط وقوع احدى دائرتين بتمامها داخل الاخرى هو :ـ

$د_1$ تقع بتمامها داخل $د_2$ $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ $<$ $|نق_1 - نق_2|$

وفي حالة اتحاد مركز $د_1$ مع مركز $د_2$ يمكن استنتاج الشرط التالي $د_1$ تتحد مع $د_2$ بالمركز $\Longleftrightarrow$ المسافة بين $م_1$ ، $م_2$ = صفرا

(٨) من المعادلة ٣

(أ) اذا وقع مركز الدائرة على محور السينات فان الاحداثي الصادى للمركز = صفرا ، اى $\left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢} \right)$ = (هـ ، صفر)

ومن هذه نحصل ان ب = صفرا وتصبح المعادلة :

$س^{٢} + ص^{٢} + أس + حـ = ٠$

(ب) اذا وقع مركز الدائرة على محور الصادات فان الاحداثي السيني للمركز = صفرا ، اى $\left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢} \right)$ = (صفر ، ك) ومن هذه نحصل على ان أ = صفرا وتصبح المعادلة :

$س^{٢} + ص^{٢} + ب ص + حـ = صفر$

(جـ) اذا مرت الدائرة بنقطة الاصل فان نقطة الاصل تحقق المعادلة ومن ذلك نحصل على ان حـ = صفر وتكون المعادلة (٣) على الصورة التالية

$س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص = صفرا$

(٩) لايجاد معادلة الدائرة التي قطرها المستقيم الذى نهايتاه النقطتان $(س_{١} ، ص_{١})$ ، $(س_{٢} ، ص_{٢})$ نجدها كما يلي :-

(١) مركزها النقطة $\left(\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢} \right)$

(٢) نصف قطرها = $\frac{١}{٢} \sqrt{(ص_{٢} - ص_{١})^{٢} + (س_{٢} - س_{١})^{٢}}$ وبعد ذلك يمكن كتابة المعادلة بدلالة مركزها وطول نصف قطرها كما في الصيغة (٢) .

(١٠) لايجاد معادلة مماس الدائرة عند نقطة واقعة عليها نتبع مايلي :-

١- نجد ميل نصف قطرها الواصل بين مركزها ونقطة التماس المعلومة

٢- نجد ميل المماس (= المقلوب السالب لميل نق)

٣- من ميل المماس ونقطة التماس نجد معادلة المماس .

(١١) لايجاد معادلة مماس الدائرة من النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ (الخارجة عن الدائرة) الى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} + أ س + ب ص + حـ = ٠$ نتبع مايلي

١- نجد مركز الدائرة = $\left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢} \right)$ = (هـ ، ك)

٢- نجد نق = $\sqrt{هـ^{٢} + ك^{٢} - حـ}$

٣- نفرض ميل المماس = ل . ونجد معادلة المماس للدائرة بدلالة ل والنقطة $(س_{١} ، ص_{١})$

اى ل = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ وبالتبسيط ل س − ص − ل $س_1$ + $ص_1$ = ٠ ——— (١)

٤ ــ من شروط تماس مستقيم مع دائرة

المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم الذى معادلته (١) في المستوى الاقليدى = نق ومن هذه المعادلة نجد قيمة ل ونعوضها في المعادلة (١) فهي معادلة المماس المطلوبة ٠

ومن الجدير بالذكر انه يمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة خارجة عنها ومتساويين بالطول ٠

(١٢) لايجاد معادلة الدائرة اذا علم مركزها ومعادلة مماسها نلخص كما يلي :ــ نجد ميل المماس ومنه نجد ميل نق (= المقلوب السالب لميل المماس) ٠ ومن ميل نق ومركز الدائرة نجد معادلة نق ٠ وبحل معادلة المماس ومعادلة نق انيا ٠ نجد نقطة التقاطع (نقطة التماس) وبايجاد المسافة بين مركز الدائرة ونقطة التماس نحصل على نق ومعرفة مركز الدائرة ونصف قطرها نستطيع كتابة معادلة الدائرة كما في الصيغة (٢) ٠

او نستطيع ايجاد طول نق بايجاد المسافة بين مركز الدائرة والمماس في المستوى الاقليدى وبعد ذلك نكتب المعادلة ٠

(١٣) لايجاد طول المماس المرسوم للدائرة من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) (الخارجة عن الدائرة)

$س^2 + ص^2$ + أ س + ب ص + حـ = ٠ نتبع مايلي :ــ

١ ــ نجد مركز الدائرة $\left(\frac{-أ}{2} ، \frac{-ب}{2} \right)$ = (هـ ، ك) ثم نجد

$$نق = \sqrt{هـ^2 + ك^2 - حـ}$$

٢ ــ نجد المسافة بين ($س_1$ ، $ص_1$) ومركز الدائرة (هـ ، ك) ولتكن م

٣ ــ نستخدم نظرية فيثاغورس لايجاد طول المماس اى (طول المماس $)^2$ = $م^2 - نق^2$

(١٤) يعرف وتر الدائرة بانه قطعة مستقيمة تقع نهايتاها على الدائرة ٠ ولايجاد طول الوتر اذا اعطي بنظام يتكون من معادلتين احداهما معادلة دائرة والاخرى معادلة مستقيم فنحل المعادلتين انيا ٠ وبعد ذلك نحصل على نقطتي تقاطعهما ٠ ثم نجد المسافة بين هاتين النقطتين فهي طول الوتر اما اذا اعطي بنظام يتكون من معادلتين كل منهما تمثل معادلة دائرة ٠

ففي هذه الحالة يتكون وتر مشترك للدائرتين • ونجد طوله بحل المعادلتين انيا وذلك بطرح احدى المعادلتين من الاخرى فنحصل على معادلة من الدرجة الاولى • ومن المعادلة الاخيرة نعوض في احدى معادلتي الدائرتين لنحصل على نقطتي التقاطع •

وبعد ذلك يمكن ايجاد طوله بتطبيق المسافة بين النقطتين وكذلك يمكن ايجاد معادلة الوتر المشترك بينهما الذى هو المستقيم المار بنقطتي تقاطعهما •

(١٥) لايجاد طول الجزء الذى تقطعه الدائرة من محور السينات نتبع الطريقة التالية

$س^2 + ص^2 + أس + ب ص + حـ = ٠$ معادلة الدائرة

نحل معادلة الدائرة هذه مع معادلة محور السينات انيا اى نجعل ص = ٠ فتصبح المعادلة $س^2 + أ س + حـ = ٠$

وبحل المعادلة $س^2 + أ س + حـ = ٠$ نحصل على الجذرين وليكونا

$س = س_1$ ، $س = س_2$

∴ نقطتا تقاطع الدائرة مع المحور الاول هما $(س_1 ، ٠)$ ، $(س_2 ، ٠)$

∴ طول الجزء الذى تقطعه الدائرة من المحور الاول = $|س_2 - س_1|$

وبنفس الطريقة نجد طول الجزء الذى تقطعه من المحور الثاني وذلك بان نجعل س = ٠ فتصبح معادلة الدائرة

$ص^2 + ب ص + حـ = ٠$

وليكن جذرا المعادلة هذه $ص_1$ ، $ص_2$

∴ $(٠ ، ص_1)$ ، $(٠ ، ص_2)$ هما نقطتا تقاطع الدائرة مع المحور الثاني

∴ طول الجزء الذى تقطعه الدائرة من المحور الثاني = $|ص_2 - ص_1|$

ــ تمارين ــ ١ــ ٧

(١) جد معادلة الدائرة من الشروط التالية :ــ

١) مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها (٣) وحدات

٢) مركزها (٢ ، ــ ٣) ونصف قطرها (٧) وحدات

٣) تمر بنقطة الاصل ومركزها (٦ ، ــ ٨)

٤) تمر بالنقطة (٢ ، ٦) ومركزها (ــ ١ ، ٢)

٥) النقطتان (٣ ، ٢) ، (ــ ١ ، ٦) نهايتا قطر فيها .

٦) مركزها نقطة الاصل وتمس المستقيم ٣ س ــ ٤ ص + ٢٠ = ٠

٧) مركزها (١ ، ــ ١) والمستقيم ٥ س ــ ١٢ص + ٩ = ٠ ، يمس الدائرة

٨) الدائرة تمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (ــ ١ ، ٣) ومركزها يقع على المستقيم ٣س ــ ص ــ ٢ = ٠

٩) الدائرة تمر بالنقاط (١ ، ١) ، (١ ، ــ ١) ، (٢ ، ٠)

الاجوبة على الترتيب / $س^٢ + ص^٢ = ٩$ ، $(س ــ ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٤٩$ ،
$(س ــ ٦)^٢ + (ص + ٨)^٢ = ــ ١$ ، $(س + ١)^٢ + (ص ــ ٢)^٢ = ٢٥$ ،
$(س ــ ١)^٢ + (ص ــ ٤)^٢ = ١٠$ ، $(س ــ ١)^٢ + ص^٢ = ١$

(٢) جد معادلة المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ عند النقطة (ــ ٤ ، ٣)

الجواب ٣ص ــ ٤ س = ٢٥

★ (٣) ١) برهن تحليليا ان المماسين لدائرة عند نهايتي قطر فيها يكونان متوازيين .

٢) برهن تحليليا ان الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة .

٣) برهن تحليليا ان المستقيم لا يقطع الدائرة في اكثر من نقطتين .

٤) برهن تحليليا ان العمود النازل من مركز اى دائرة على وتر فيها ينصفه .

(٤) جد طول كل من الاوتار التالية (كل منها معطى بنظام يتكون من معادلتين احداهما معادلة دائرة والاخرى معادلة مستقيم) .

١) $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ ، س + ٢ = ٠

٢) $س^٢ + ص^٢ = ٩$ ، ص ــ ١ = ٠

٣) $س^٢ + ص^٢ + ٢س ــ ١٢ = ٠$ ، س ــ ص = ٠

٤) $س^٢ + ص^٢ = ٤$ ، س + ص = ٢

الاجوبة/ ٨٤ ، ٣٢٢ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٢ $\sqrt{٢}$

(٥) أ) ظلل كلا من المجموعات التالية في المستوى الاقليدى :—

هـ$_1$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 < ٤ }

هـ$_2$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 ≤ ٩ }

هـ$_3$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 ≤ ٢٥ ، س < ص }

هـ$_4$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 − ٤ س − ٢ ص − ٤ ≤ ٠ ، ٢ ص ≤ س }

هـ$_5$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 < ٤ ، صفر ≤ ص < $\frac{س}{٢}$ }

هـ$_6$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 ≥ ١ ، ص^2 < ٤ }

هـ$_7$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 − ١ ≥ صفر ، ٤ − س^2 − ص^2 ≥ صفر }

هـ$_8$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س ≥ ٢ ص ، ص ≤ ٢ س }

ب) لتكن م$_1$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، س^2 + ص^2 ≤ ٩ }

م$_2$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ص ≤ ٢ }

ظلل كلا من م$_1$ ∩ م$_2$ ، م$_1$ / م$_2$

حـ) لتكن د$_1$ = { (س ، ص) : ب^2 + ص^2 + ٦ س + ٢ ص ≤ ١٥ }

د$_2$ = { (س ، ص) : س^2 + ص^2 − ٤ س + ٨ ص ≤ ٦١ }

د$_3$ = { (س ، ص) : ص − ٦ < ٢ }

ظلل كلا من (١) د$_1$ ∩ د$_2$ (٢) د$_1$ ∪ د$_2$ (٣) د$_1$ / د$_2$ (٤) د$_2$ / د$_1$

د$_3$ ∩ د$_2$ ، د$_3$ / د$_2$ ، د$_3$ ∩ د$_1$ ، (د$_1$ ∩ د$_2$) ∩ د$_3$

(د$_1$ ∩ د$_3$) / د$_2$ ، (د$_3$ ∪ د$_2$) / د$_1$ ، ك / د$_2$

حيث ك المستوى الاقليدى

(٦) لتكن د = { (س، ص) : س٢ + ص٢ = ٨١ }
ولتكن ل = { (س، ص) : س = أ، أ ∈ ح }
أ) فاذا كانت د ∩ ل = مجموعة احادية فجد قيمة أ
ب) لتكن م = { (س، ص) : س = ٧ }
ولتكن حـ ، د ∈ م ∩ د ، جد طول قطعة المستقيم الواصل بين حـ ، د
الاجوبة : أ = ٩ ، حـد = ١٢٨ وحدة .

(٧) جد طول المماسات المرسومة للدائرة { (س، ص) : س٢ + ص٢ = ٤ } من النقطة (٢، ٦)
الجواب : (٦) وحدات

(٨) اثبت ان وتر الدائرة ٩ س٢ + ٩ ص٢ − ١٨ س + ٦ ص − ١٧٠ = صفرا
الذي معادلته س − ٣ص + ٨ = ٠ ، تقابله زاوية مركزية قائمة .

(٩) جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات ومركزها (٣، ٢) ماهو طول نصف قطرها
الجواب (س − ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤ ، (٢) وحدة

(١٠) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٠، ٠) ومركزها يقع على محور السينات
الجواب س٢ + ص٢ − ٣س = ٠

(١١) جد معادلة الدائرة التي مركزها في الربع الاول وتمس المحورين الاحداثيين اذا كان طول نصف قطرها (٥) وحدات .
الجواب (س − ٥)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

(١٢) النقطة (٣، −١) هي مركز الدائرة التي تقطع من المستقيم ٢س − ٥ص + ١٨ = صفرا ، جزء طوله (٦) وحدات وما معادلتها .
الجواب (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٣٨

* (١٣) اكتب معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ($\sqrt{٥}$) وحدة والتي تمس المستقيم س − ٢ص − ١ = ٠ عند النقطة (٣، ١) .
الجواب (س − ٤)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٥ ، او (س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٥

(١٤) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ٢س + ص − ٥ = ٠ ، ٢س + ص + ١٥ = ٠
اذا كانت احدى نقاط التماس هي (٢، ١) .
الجواب (س − ٦)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٠

* (١٥) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة أ (١، ٠) ، والتي تمس المستقيمين
٢س + ص + ٢ = ٠
٢س + ص − ١٨ = ٠
الجواب (س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٠

(١٦) جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم ٢س + ص = ٠ ، والتي تمس المستقيمين ٤س ـ ٣ص + ١٠ = ٠ ، ٤س ـ ٣ص ـ ٣٠ = ٠

الجواب (س ـ ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٦

* (١٧) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الاصل والتي تمس المستقيمين س + ٢ص ـ ٩ = ٠ ، ٢س ـ ص + ٢ = ٠

الجواب (س ـ ٢)^{٢} + (ص ـ ١)^{٢} = ٥ او (س ـ $\frac{٢٢}{٥}$)^{٢} + (ص + $\frac{٣١}{٥}$)^{٢} = $\frac{٢٨٩}{٥}$

(١٨) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ٧س ـ ص ـ ٥ = ٠ ، س + ص + ١٣ = ٠ اذا كانت (١ ، ٢) هي احدى نقاط التماس .

الجواب (س + ٦)^{٢} + (ص ـ ٣)^{٢} = ٥٠ ، (س ـ ٢٩)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٨٠٠

(١٩) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (ـ ١ ، ٥) والتي تمس المستقيمين ٣س + ٤ص ـ ٣٥ = ٠ ، ٤س + ٣ص + ١٤ = ٠

الجواب (س + ٨)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = $\frac{٢٥}{١٣}$

* (٢٠) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمات الثلاثة ٤س ـ ٣ص ـ ١٠ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ٥ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ١٥ = ٠ ،

الجواب (س ـ ٢)^{٢} + (ص ـ ١)^{٢} = ٢٥ ، (س + $\frac{٢٠٢}{٤٩}$)^{٢} + (ص ـ $\frac{٣٤٩}{٤٩}$)^{٢} = ($\frac{١٨٥}{٤٩}$)^{٢} .

(٢١) اكتب معادلة الدائرة التي تمس المستقيمات الثلاثة .ـ ٣س + ٤ص ـ ٣٥ = ٠ ، ٣س ـ ٤ص ـ ٣٥ = ٠ ، س ـ ١ = ٠

(٢٢) عين ايا من المعادلات التالية تمثل معادلة دائرية ، مجموعة احادية ، مجموعة خالية ، واذا كانت معادلة دائرة فجد مركزها ونصف قطرها .

(١) (س ـ ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥ ، (٢) (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٦٤

(٣) (س ـ ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = صفر ، (٤) س^{٢} + (ص ـ ٥)^{٢} = ٥

(٥) س^{٢} + ص^{٢} ـ ٢س + ٤ص ـ ٢٠ = صفر ، (٦) س^{٢} + ص^{٢} ـ ٢س + ٤ص + ١٤ = صفر

(٧) س^{٢} + ص^{٢} + ٤س ـ ٢ص + ٥ = صفر ، (٨) س^{٢} + ص^{٢} + س = صفر

(٩) س^{٢} + ص^{٢} + ٦س ـ ٤ص + ١٤ = صفر (١٠) س^{٢} + ص^{٢} + ص = ٠

الاجوبة/ ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ كل منها تمثل معادلة دائرة .

(١) م$_{١}$ (٥ ، ـ ٢) ، نق$_{١}$ = ٥ ، (٢) م$_{٢}$ (ـ ٢ ، ٠) نق$_{٢}$ = ٨

(٣) تمثل مجموعة احادية وهي $\{(٥ ، -٢)\}$ ، (٤) $م_٤$ (٠ ، ٥) ، نق$_٤$ = $\sqrt{٥}$ (٥) $م_٥$ (١ ، -٢) ، نق$_٥$ = ٥ ، (٦) مجموعة خاليــة

(٧) مجموعة احادية وهي $\{(-٢ ، ١)\}$ (٨) $م_٨$ ($-\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، نق$_٨$ = $\frac{١}{٢}$ ،

(٩) مجموعة خالية (١٠) $م_{١٠}$ (٠ ، $-\frac{١}{٢}$) ، نق$_{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

* (٢٣) في كل مايلي :- جد اقصر مسافة من النقطة المعطاة الى الدائرة المبينة معادلتها ازاءها :-

(١) (٦ ، -٨) ، $س^٢ + ص^٢ = ٩$

(٢) (-٧ ، ٢) ، $س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٤ص - ١٥١ = ٠$

(٣) (٣ ، ٩) ، $س^٢ + ص^٢ - ٢٦س + ٣ص + ٣١٣ = ٠$

الاجوبة / ٧ ، ٢ ، ١٧

* (٢٤) في كل مما يلي اعطي نظام يتكون من معادلتين احداهما معادلة دائرة والاخرى معادلة مستقيم . بين العلاقة بينهما او بعبارة اخرى بين فيما اذا كان المستقيم يمس او يقطع او لايمس او لايقطع الدائرة .

(١) ص = ٢س - ٣ ، $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٢ص - ٣ = ٠$

(٢) ص = $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{١}{٢}$ ، $س^٢ + ص^٢ - ٨س + ٢ص + ١٢ = ٠$

(٣) ص = س + ١٠ ، $س^٢ + ص^٢ - ١ =$ صفر

الاجوبة/ (١) يقطع الدائرة (٢) يمس الدائرة (٣) لايقطع الدائرة

(٢٥) لتكن $هـ_١ = \{$(س ، ص) : (س ، ص) $\in$ ح×ح ، ص = م س ، حيث م $\in$ ح$\}$

$هـ_٢ = \{$(س ، ص) : (س ، ص) $\in$ ح×ح ، $س^٢ + ص^٢ - ١٠س + ١٦ = ٠\}$

جد قيمة م في كل مـن الحالات التاليـة :-

١) اذا كان $هـ_١ \cap هـ_٢$ = مجموعة ذات عنصرين (٢) اذا كان $هـ_١ \cap هـ_٢$ = مجموعة احاديــة .

٣) اذا كان $هـ_١ \cap هـ_٢$ = مجموعة خاليــة

الاجوبة (١) $|م| < \frac{٣}{٤}$ (٢) $|م| = \frac{٣}{٤}$ (٣) $|م| > \frac{٣}{٤}$

(٢٦) ليكن ل = { (س ، ص) : ص = م س + ك ، حيث م ، ك ∈ ح }

وليكن د = { (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} ، نق ∈ ح$^{++}$ }

فاذا كان ل ∩ د = مجموعة احادية فاثبت ان نق = $\frac{\text{ك}^{٢}}{١ + \text{م}^{٢}}$

(٢٧) اكتب معادلة قطر الدائرة (س ــ ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٦ ، والذى ينصف وتــــر الدائرة الذى يقع على المستقيم س ــ ٢ص ــ ٣ = ٠ ،

الجواب / ٢س + ص ــ ٣ = ٠

★ (٢٨) اكتب معادلة وتر الدائرة (س ــ ٣)^{٢} + (ص ــ ٧)^{٢} = ١٦٩ والذى منتصفه النقطة (٥ر٨ ، ٥ر٣)

الجواب / ١١س ــ ٧ص ــ ٦٩ = ٠

(٢٩) جد طول وتر الدائرة (س ــ ٢)^{٢} + (ص ــ ٤)^{٢} = ١٠ والذى منتصفه النقطة (١ ، ٢)

الجواب ٢ $\sqrt{٥}$ وحـــدة ٠

★ (٣٠) اكتب معادلة الدائرة التي تمر من النقطة (١ ، ــ ١) ومن نقطتي تقاطـــــع الدائرتين س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ــ ٢ص ــ ٢٣ = ٠ ،

س^{٢} + ص^{٢} ــ ٦س + ١٢ص ــ ٣٥ = ٠

الجواب / س^{٢} + ص^{٢} + ٦س ــ ٩ص ــ ١٣ = ٠

★ (٣١) اكتب معادلة الدائرة التي تمر من نقطة الاصل ومن نقطتي تقاطع الدائرتيــــن (س + ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥ ، (س ــ ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩

الجواب / ١٣س^{٢} + ١٣ص^{٢} + ٣س + ٧١ص = ٠

★ (٣٢) لتكن ل$_{١}$ (٣س + ٤ص ــ ١٠) + ل$_{٢}$ (٣س ــ ص ــ ٥) = ٠ معادلة مجموعة المستقيمات المارة من نقطة تقاطع مستقيمين ٠ فجد معادلة المستقيم الذى ينتمي الى هـــــذه المجموعة ويمس الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ــ ٤ص = ٠ ،

الجواب / ٢س ــ ص = ٠ ، او ٢س + ص ــ ٥ = ٠

★ (٣٣) اكتب معادلة الوتر المشترك للدائرتين ــ المستقيم المار بنقطتي تقاطع الدائرتين ــ س^{٢} + ص^{٢} + ٣س ــ ص = ٠ ، ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} + ٢س + ص = ٠

الجواب / ٧س ــ ٤ص = ٠

★ (٣٤) جد بعد مركز الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢س عن المستقيم الواصل بين نقطتي تقاطع الدائرتين س^{٢} + ص^{٢} + ٥س ــ ٨ص + ١ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٧س ــ ٢٥ = ٠ ،

الجواب / (٢) وحدة ٠

* (٣٥) جد طول الوتر المشترك بين الدائرتين س٢ + ص٢ − ١٠ص = ٠ ،
س٢ + ص٢ + ٦س + ٢ص − ٤٠ = ٠
الجواب / (١٠) وحدات .

* (٣٦) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم س + ص = ٠ ، وتمر بنقطتي
تقاطع دائرتين (س − ١)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٥٠ ،
(س + ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٠
الجواب / (س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١٠

(٣٧) جد اقرب نقطة من نقاط الدائرة ١٦س٢ + ١٦ص٢ + ٤٨س − ٨ص − ٤٣ = ٠
للمستقيم ٨س − ٤ص + ٧٣ = ٠ ، وجد بعد هذه النقطة عن المستقيم .
الجواب / (−٧/٢ ، ٥/٤) ، ٢ √٥

* (٣٨) من النقطة (٥/٣ ، −٥/٣) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ = ٥ . فجد
معادلتيهما .
الجواب / س − ٢ص − ٥ = ٠ ، ٢س − ص − ٥ = ٠

(٣٩) جد معادلتي المماسين المرسومين للدائرة س٢ + ص٢ + ٢س − ١٩ = ٠ من النقطة
(١ ، ٦)
الجواب / ٢س + ص − ٨ = ٠ ، س − ٢ص + ١١ = ٠

(٤٠) جد الزاوية بين المماسين المرسومين للدائرة س٢ + ص٢ = ١٠ من النقطة (٤ ، ٢)
الجواب / ٩٠°

(٤١) رسم مماسان للدائرة (س − ١)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٤ من النقطة (٢ ، −٣)
فجد معادلة المستقيم الواصل بين نقطتي التماس .
الجواب / س + ٢ص + ٥ = ٠

* (٤٢) من النقطة (٦ ، −٨) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ = ٢٥ ، جد بعد
المستقيم الواصل بين نقطتي التماس عن هذه النقطة .
الجواب / ٧,٥ وحدة .

(٤٣) من النقطة (−٩ ، ٣) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ − ٦س + ٤ص − ٧٨ = ٠
جد بعد المركز الدائرة عن المستقيم الواصل بين نقطتي التماس .
الجواب / (٦) وحدات .

* (٤٤) من النقطة (٤ ، −٤) رسم مماسان للدائرة س٢ + ص٢ − ٦س + ٢ص + ٥ = ٠
جد طول الوتر الواصل بين نقطتي التماس .
الجواب (√١٠) وحدة .

★ (٤٥) جد طول المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ + س − ٣ص − ٣ = ٠ من النقطة (١ ، −٢)

الجواب / (٣) وحدات .

(٤٦) جد معادلة المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ + ١٠س − ٢ص + ٦ = ٠ والموازي للمستقيم ٢س + ص − ٧ = ٠

الجواب / ٢س + ص − ١ = ٠ ، ٢س + ص + ١٩ = ٠

(٤٧) جد معادلة المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ + ٢س + ٤ص = ٠ والعمود على المستقيم س − ٢ص + ٩ = ٠

الجواب / ص + ٢س + ٩ = ٠ ، ص + ٢س − ١ = ٠

(٤٨) اذا كان المستقيم $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$ يمس الدائرة س٢ + ص٢ = نق٢ فاثبت

ان $\frac{١}{\text{أ}^{٢}} + \frac{١}{\text{ب}^{٢}} = \frac{١}{\text{نق}^{٢}}$ حيث أ ، ب ≠ صفر .

(٤٩) برهن ان النقاط (٥ ، −٨) ، (١ ، −٨) ، (١ ، −١٠) ، (٥ ، −١٠) دائرية .

تلميح للحل / جد معادلة الدائرة المارة بثلاث نقاط منها فاذا حققت الرابعة هذه المعادلة فان النقاط الاربع دائرية .

(٥٠) اذا كانت النقطتان (٥ ، ٢) ، (ل ، ٤) نهايتي قطر دائرة يمس محور الصادات . فجد معادلات هذه الدائرة .

الجواب / $(\text{س} - \frac{١٣}{٥})^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢} = \frac{١٦٩}{٢٥}$

★ (٥١) جد طول المماس المرسوم للدائرة س٢ + ص٢ − ٦س + ٢ص − ٣ = ٠ من النقطة (−٤ ، ٠)

الجواب / $\sqrt{٣٧}$ وحدة

★ (٥٢) جد معادلة الدائرة المرسومة داخل المثلث الذي معادلات اضلاعه

٣س − ٤ص − ١٩ = ٠ ، ٤س − ٣ص − ١٧ = ٠ ، س + ٧ = ٠

الجواب / س٢ + ص٢ + ٤س − ٢١ = ٠

★ (٥٣) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (−٦ ، −٢) ومركزها يقع على محور الصادات .

الجواب / س٢ + ص٢ + ٥ص − ٣٠ = صفر

★ (٥٤) جد معادلة الدائرة التي تمر من منتصفات اضلاع المثلث الذي رؤوسه النقاط (أ ، ٠) ، (ب ، ٠) ، (٠ ، حـ) حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ، ب ، حـ ≠ صفر

الجواب $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - \frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\text{س} + \frac{\text{أب} - \text{حـ}^{٢}}{٢\text{حـ}}\text{ص} = \text{صفر}$

(٥٥) جد معادلة كل من المجموعات التاليـة :ـ

هـ١ = { أ : أ نقطة بحيث مجموع مربعي بعديها عن المستقيمين س ــ ٢ ص = ٧ ، ٢س + ص = ٣ يساوى ٧ دائما . }

هـ٢ = { أ : أ نقطة بحيث بعدها عن المستقيم ٣س + ٤ص ــ ١ = ٠ يساوى مربـع بعدها عن النقطة (٢ ، ٣) }

هـ٣ = { أ : أ نقطة بحيث مربع بعدها عن المستقيم س + ص = ٦ ، يساوى مساحة المستطيل المحدد بالاحداثيين والاعمدة النازلة من النقطة عليهما }

الاجوبة/ هـ١ = { (س ، ص) ، ٥س٢ + ٥ص٢ ــ ٢٦س + ٢٢ص + ٢٣ = ٠ }

هـ٢ = { (س ، ص) . ٥س٢ + ٥ص٢ ــ ٢٣س ــ ٤٣ص + ٦٦ = ٠ او

٥س٢ + ٥ص٢ ــ ١٧س ــ ٢٦ص + ٦٤ = ٠ }

هـ٣ = { (س ، ص) : س٢ + ص٢ ــ ١٢س ــ ١٢ص + ٣٦ = ٠ }

* (٥٦) برهن ان المستقيمات س ــ ٧ص ــ ٥ = ٠ ، س ــ ص ــ ٥ = ٠ ، س ــ ٣ص ــ ٧ = ٠ ، س + ٣ص + ٥ = ٠ هي اربعة اضلاع على الترتيب لشكـل رباعي دائرى . ثم جد معادلة الدائرة المارة برؤوسه .

الجواب/ س٢ + ص٢ + ٢س + ٦ص ــ ٣ = ٠

* (٥٧) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (١ ، ٠) والتي تمس المستقيـم ٣س + ٢ص ــ ٤ = ٠ عند النقطة (٢ ، ــ ١)

الجواب/ س٢ + ص٢ ــ ٢س ــ ٢س + ١ = ٠

(٥٨) جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم س = ٣ عند النقطة (٣ ، ٠) والـتي تقطع من المستقيم ص + ٤ = ٠ ، جزءا طوله (٦) وحدات .

الجواب/ س٢ + ص٢ + ٤س ــ ٢١ = ٠ ، س٢ + ص٢ ــ ١٦س + ٣٩ = ٠

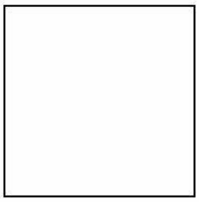
(٥٩) الدائرة س٢ + ص٢ ــ ٤س ــ ٦ص + أ = صفر تمس محور السينات . فجد قيمة أ . حيث أ ∋ ح ثم جد نقطة التماس .

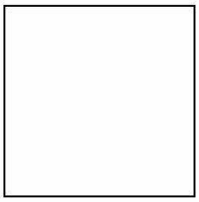
الجواب/ أ = ٤ وحدات (٢ ، ٠) .

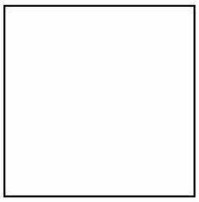
(٦٠) جد قيمة ك ∋ ح ، التي تجعل من المستقيم ٢س ــ ص + ك = ٠ ، مماسـا للدائرة س٢ + ص٢ + ٤أص + ٦أس + ٨أ٢ = صفر حيث أ ∋ ح

الجواب/ ك = ــ أ ، ك = ٩أ

* (٦١) رسمت مماسات من النقاط (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٧) ، (٥ ، ٣) للدائـرة س٢ + ص٢ ــ ٢س ــ ٤ص ــ ٤ = ٠ برهن ان الاوتار الناتجة من نقاط التمـاس متلاقيـة .







الفصل الثاني
التطبيقات العددية

ملاحظـــات

١) يسمى ق : ك ⟵ ل تطبيقا عدديا ⟺ كل من ك ، ل مجموعة جزيئة من ح غير خاليـة .

٢) ق : ك ⟵ ح متناظر مع المحور الثاني ⟺ (∀س) (اذا كـــان س ∋ ك) فان ق (س) = ق (ـــس) ، ـــس ∋ ك

او بعبارة اخرى اذا كان (س، ص) ∋ ق فان(ـــس ، ص) ∋ ق ، ∀س ، ـس ∋ ك ⟺ ق متناظر مع المحور الثاني حيث ق : ك⟵ح

٣) ق : ك ⟵ ح متناظر مع نقطة الاصل ⟺ ∀س ∋ ك ، ∀ـــس ∋ك فان ق (س) = ـــ ق (ـــس)

او بعبارة اخرى

اذا كان (س ، ص) ∋ ق فان(ـــس، ـــص) ∋ ق ، ∀س ، ـــس ∋ ك ⟺ ق متناظر مع نقطة الاصل .

٤) تط (ك) هي مجموعة التطبيقات العددية التي منطلقها ك ومستقرهـا ح

٥) اذا كان Ø ∋ تط (ك) بحيث ان Ø (س) = صفر ∀ س ∋ ك فان Ø يسمى بالتطبيق الصفرى

٦) اذا كان كل من ق ، ل ∋ تط (ك) فان

(١) (ق ⊕ ل) ∋ تط (ك) بحيث (ق ⊕ ل) (س) = ق(س) + ل (س) ∀س ∋ ك .

(٢) (ق ⊙ ل) ∋ تط (ك) بحيث (ق ⊙ ل) (س) = ق (س) • ل (س) ∀س ∋ ك .

(٣) (ق ⨸ ل) ∋ تط (ك) بحيث (ق ⨸ ل) (س) = ق(س) / ل (س) ∀ س ∋ ك ، ل (س) ≠ ٠ .

(٤) ⊖ ق ∋ تط (ك) بحيث (⊖ ق) (س) = ـــ ق(س) ∀ س ∋ ك

(٥) (أ ق) ∋ تط (ك) بحيث (أ ق) (س) = أ ق (س) ∀س ∋ ك ، أ ∋ ح

(٦) ان كان ق ∈ قط (ك) وأن ق (س) = أ٠ + أ١ س + أ٢ س^{٢} +

...... + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + أن س^{ن} حيث أ٠ ، أ١ ، أ٢ ، ....

أن اعداد حقيقية وأن ن ∈ ط

فيسمى ق تطبيقا عدديا متعدد الحدود من الدرجة ن Polynomial

(٧) ليكن ق ∈ قط (ك)

(١) ق محدود من الاعلى ⟺ (∃ ل ∈ ح) ∧ (ق (س) ≤ ل)
(∀ س ∈ ك) ويقال ان ل حدا اعلى.

(٢) ق محدود من الاسفل ⟺ (∃ هـ ∈ ح) ∧ (ق (س)
≥ هـ) (∀ س ∈ ك)

(٣) ق محدود ⟺ ق محدود من الاعلى و ق محدود من الاسفل .

ق غير محدود من الاعلى ⟺ (∀ ل) ∈ المدى، ∃ س ∈ المنطلق
بحيث ق (س) > ل

ق غير محدود من الاسفل ⟺ ∀ هـ ∈ المدى ، ∃ س ∈ المنطلق
بحيث ق (س) < هـ

ق غير محدود ⟺ ق غير محدود من الاعلى اوغير محدود من الاسفل

ق محدود ⟺ (∀ س) (اذا كان س ∈ ك) (فان ∃ ل ∈ ح$^{++}$
بحيث |ق (س)| ≤ ل

ق غير محدود ⟺ (∀ ل) (اذا كان ل ∈ ح$^{++}$) ،
∃ س ∈ ك بحيث |ق (س)| > ل

(٨) ∀ ق ∈ قط (ك) ، أ ، ب ∈ ح

يقال ان أ اعظم قيمة للتطبيق ق اذا تحقق الشرطان التاليان :-

١) ∃ س١ ∈ منطلق ق بحيث ق (س١) = أ

٢) ∀ س ∈ منطلق ق فان ق (س) ≤ أ

وتسمى (س١ ، ق (س١)) نقطة اعظم قيمة للتطبيق ق

ويقال ان ب اصغر قيمة للتطبيق ق اذا تحقق الشرطان التاليان :-

١) ∃ س٢ ∈ منطلق ق بحيث ق (س٢) = ب

٢) ∀ س ∈ منطلق ق فان ق (س) ≥ ب

وتسمى (س٢ ، ق (س٢)) نقطة اصغر قيمة للتطبيق ق .

(٩) ليكن ق $\in$ قط (ك) وليكن حـ $\subset$ ك ، $\forall$ $س_1$ ، $س_2$ $\in$ حـ فان

١) ق متزايد في حـ $\Longleftrightarrow$ اذا كان $س_1$ > $س_2$ $\Longrightarrow$ ق($س_1$) > ق ($س_2$)

٢) ق متناقص في حـ $\Longleftrightarrow$ اذا كان $س_1$ > $س_2$ $\Longrightarrow$ ق($س_1$) > ق($س_2$)

٣) ق رتيب في حـ $\Longleftrightarrow$ ق متزايد في حـ او ق متناقص في حـ

(١٠) مح (ك) مجموعة كافة التطبيقات العددية المحدودة التي منطلقهـا ك ومستقرها ح

ملاحظة / اذا لم يذكر المنطلق فان المنطلق هوح

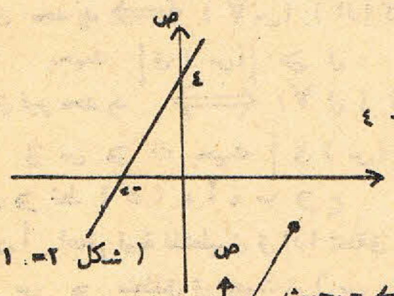
ملاحظات على التمثيل الديكارتي للتطبيقات العددية

اولاً — كل تطبيق من النوع ق (س) = أ س + ب حيث أ ، ب $\in$ ح يعتبر معادلة مستقيم (Linear equation) ويكون ١) متزايداً ↗ اذا كـان أ موجباً و ٢) متناقصاً ↘ اذا كان أ سالبا و ٣) مستقيما يوازى المحور الاول اذا كان أ = صفرا

امثلـة

١) ق (س) = ٢ س + ٤

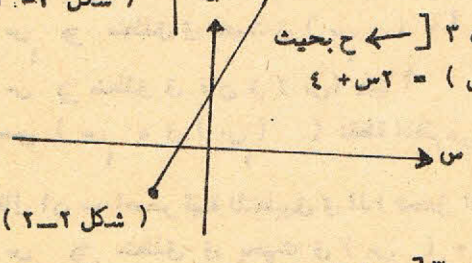
س	ص
٠	٤
-٢	٠



(شكل ٢-١)

٢) ق : [-٣ ، ٣] ⟵ ح بحيث
ق (س) = ٢س+ ٤

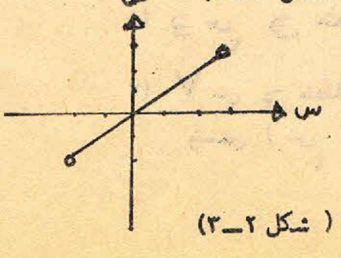
س	ص
-٣	-٢
٣	١٠



(شكل ٢-٢)

٣) ق :] -٢ ، ٣] ⟵ ح بحيث
ق (س) = س

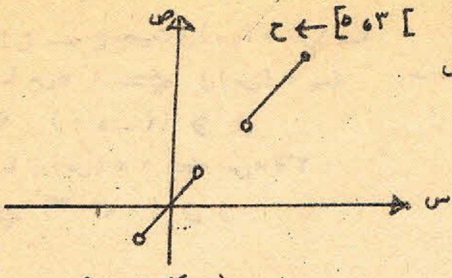
س	ص
-٢	-٢
٣	٣



(شكل ٢-٣)

٤) ق :]−١ ، ١[∪]٣ ، ٥[← ح
بحيث ق (س) = س

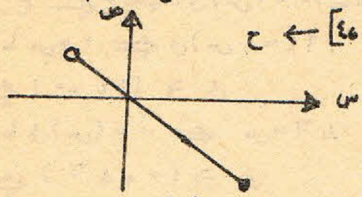
س	ص
−١	−١
١	١
٣	٣
٥	٥



(شكل ٢ــ٤)

٥) ق :]−٢ ، −١[∩]−٤ ، ٤[← ح
بحيث ق (س) = −س

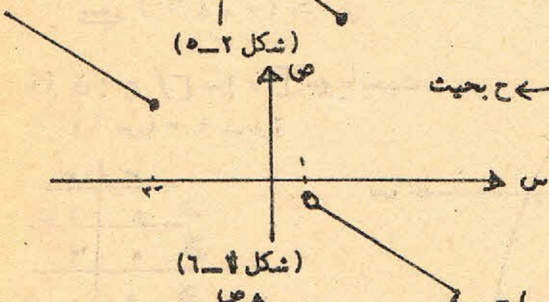
س	ص
−٢	٢
٤	−٤



(شكل ٢ــ٥)

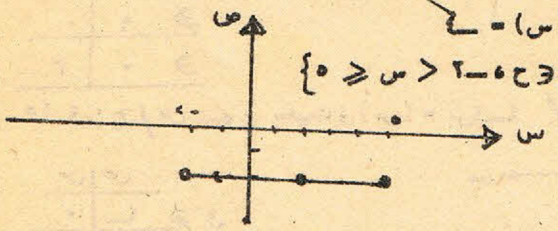
٦) ق : ح /]−٣ ، ١[← ح بحيث
ق (س) = −س

س	ص
−٣	٣
١	−١



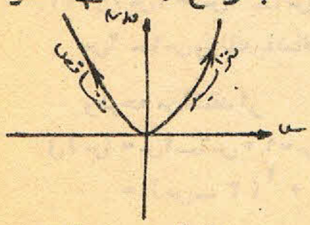
(شكل ٢ــ٦)

٧) ق : أ ← ح بحيث ق(س) = −٤
حيث أ = {س : س ∈ ح ، −٢ < س ≤ ٥}



(شكل ٢ــ٧)

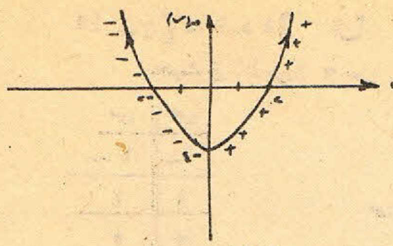
ثانيا ــ كل تطبيق من النوع ق (س) = أس٢ + ب حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفر
(قطع مكافيء Parabola)
١) يرسم بشكل ∪ اذا كان أ موجبا
٢) يرسم بشكل ∩ اذا كان أ سالبا



(شكل ٢ــ ٨)

امثلة

١) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س٢



(شكل ٢ــ٩)

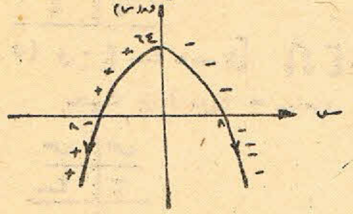
٢) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س٢ ــ ٤

عندما س = ٠ ⇐ ق(س) = ــ٤

⇐ (٠ ، ــ٤) ∋ ق

عندما ق(س) = ٠ ⇐ س = ∓٢

⇐ (∓٢ ، ٠) ∋ ق



(شكل ٢ــ١٠)

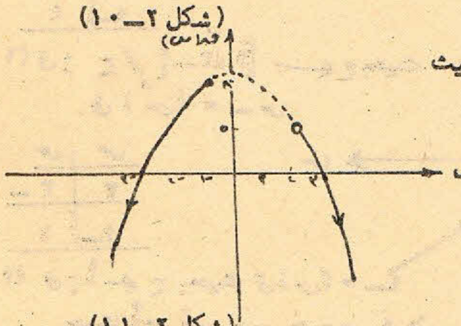
٣) ق : ح ← ح بحيث ق(س) = ٦٤ ــ س٢

عندما س = ٠ ⇐ ق(س) = ٦٤

⇐ (٠ ، ٦٤) ∋ ق

عندما ق(س) = ٠ ⇐ س = ∓٨

⇐ (∓٨ ، ٠) ∋ ق

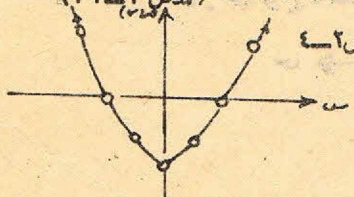


(شكل ٢ــ١١)

٤) ق : ح / [ــ١ ، ٢] ← ح بحيث

ق(س) = ٩ ــ س٢

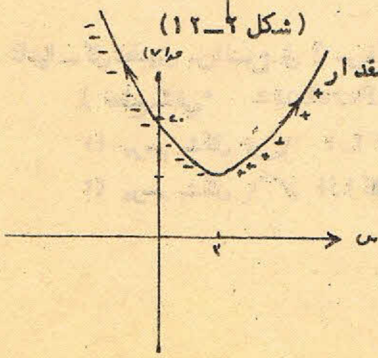
س	ص	
ــ١	٨	∋
٢	٥	∌
٠	٩	∌
٣	٠	∋



(شكل ٢ــ١٢)

٥) ق : ح / ص ← ح بحيث ق(س) = س٢ ــ ٤

س	ص	
٠	ــ٤	∌ ق
∓٢		∌ ق



(شكل ٢ــ١٣)

٦) ق(س) = س٢ ــ ٦س + ١٩ باكمال المربع للمقدار س٢ ــ ٦س وذلك باضافة $(\frac{1}{2}$ معامل س$)^2$

وطرحه من المقدار

ق(س) = س٢ ــ ٦س + ٩ = س٢ ــ ٦س + ٩ ــ ٩ + ١٩

= $($س ــ ٣$)^2$ + ١٠

س	ص
٠	١٩
٣	١٠

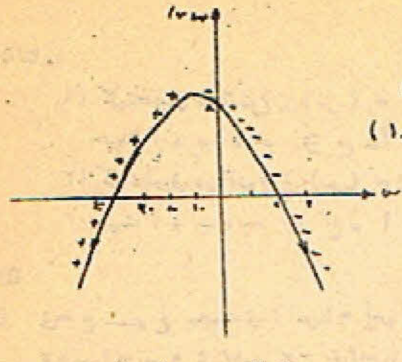
٧) ق(س) = ٨ − ٢س − س^{٢}

ق(س) = ٨ − (٢س + س^{٢})

ق(س) = ٨ − (س^{٢} + ٢س + ١ − ١)

= ٩ − (س + ١)^{٢}

س	ص
٠	٨
−١	٩
٢	٠
−٤	٠



(شكل ٢ـ٤ـ١)

تمارين (٢ـ١)

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ـ

١) ق(س) = س^{٢}

٢) ق(س) = − س^{٢}

٣) ق(س) = ٣ − س^{٢}

٤) ق(س) = ٣ + س^{٢}

٥) ق(س) = (س + ٣)^{٢}

٦) ق(س) = (س − ٣)^{٢}

٧) ق(س) = (س + ٣)^{٢} + ٤

٨) ق(س) = (س − ٣)^{٢} + ٤

٩) ق(س) = (س + ٣)^{٢} − ٤

١٠) ق(س) = (س − ٣)^{٢} − ٤

١١) ق(س) = س^{٢} − ٦س + ٩

١٢) ق(س) = س^{٢} + ٦س + ١٣

١٣) ق(س) = س^{٢} − ٦س + ٤

١٤) ق(س) = س^{٢} − ٨س + ٢٥

١٥) ق(س) = س^{٢} + ٤س + ٧

١٦) ق(س) = ٢س^{٢} − ٥ حيث ق: $\bar{ح}$ ⟵ ح

١٧) ق(س) = −٤س^{٢} + ٣

١٨) ق: ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { س^{٢} − ٤ اذا كان س^{٢} ≥ ٩ ، ٤ اذا كان س^{٢} < ٩

١٩) لتكن ق = {$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، ٣ ، ٤ ، −٢ ، −٤} ⟵ ح

بحيث ق(س) = س^{٢} − ٤

ثالثاً

١) كل تطبيق من النوع ق(س) = | أس + ب | + حـ يرسم على شكل ∨
حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

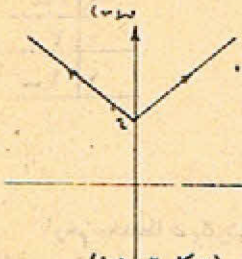
٢) كل تطبيق من النوع ق (س) = ــ | أس + ب | + حـ يرسم على شكل ∧
حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

امثلة

١) ق: ح ⟵ ح بحيث ق (س) = |س| + ٤
ق(س) = س + ٤ ∀ س ⩾ ٠ ، ق(س) = ــ س + ٤ ∀ س < ٠

س	ص
٠	٤
٢	٦

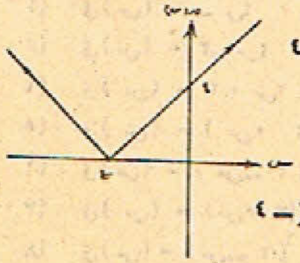
س	ص
٠	٤
ــ٢	٦



(شكل ٢ ــ ١٥)

٢) ق(س) = | ٤ + س |
(١) ق (س) = ٤ + س ∀ (٤ + س) ⩾ صفر ⟸ س ⩾ ــ ٤

س	ص
ــ٤	٠
٠	٤



(٢) ق(س) = ــ ٤ ــ س ∀ (٤ + س) < صفر ⟸ س < ــ ٤

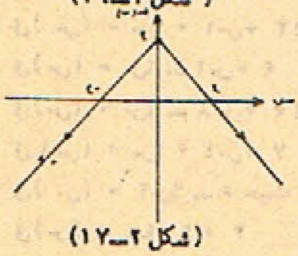
س	ص
ــ٤	٠
ــ٨	٤

(شكل ٢ ــ ١٦)

٣) ق(س) = ٤ ــ |س|
(١) ق (س) = ٤ ــ س ∀ س ⩾ ٠
(٢) ق(س) = ٤ + س ∀ س < ٠

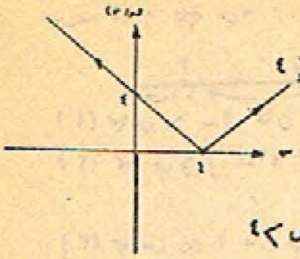
س	ص
٠	٤
٤	٠

س	ص
٠	٤
ــ٤	٠



(شكل ٢ ــ ١٧)

٤) ق(س) = |٤ − س|



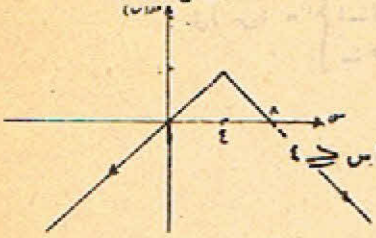
(شكل ٢ ـ ١٨)

(١) ق(س) = ٤ − س ∀ (٤ − س) ≥ ٠ ⟸ ∀ س ≤ ٤

س	ص
٤	٠
٠	٤

(٢) ق(س) = س − ٤ ∀ (٤ − س) < ٠ ⟸ ∀ س > ٤

س	ص
٤	٠
٨	٤



(شكل ٢ ـ ١٩)

٥) ق(س) = ٤ − |٤ − س|

(١) ق(س) = س ∀ (٤ − س) ≥ ٠ ⟸ ∀ س ≤ ٤

س	ص
٤	٤
٠	٠
−٢	−٢

(٢) ق(س) = ٨ − س ∀ (٤ − س) < ٠ ⟸ ∀ س > ٤

س	ص
٨	٠
٤	٤

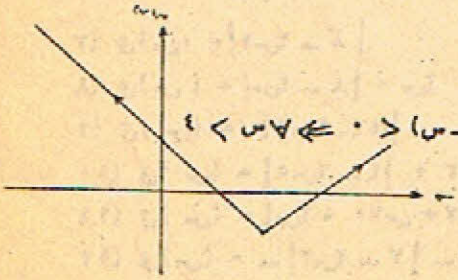
٦) ق(س) = |٤ − س| − ٢

(١) ق(س) = ٢ − س ∀ (٤ − س) ≥ ٠ ⟸ ∀ س ≤ ٤

س	ص
٤	−٢
٠	٢

(٢) ق(س) = س − ٦ ∀ (٤ − س) < ٠ ⟸ ∀ س > ٤

س	ص
٤	−٢
٦	٠



(شكل ٢ ـ ٢٠)

٧) ق(س) = |س − ٣| − |س + ٢|

س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ ، س + ٢ = ٠ ⇐ س = −٢



(١) ∀ س < −٢ فان ق(س) = ٥

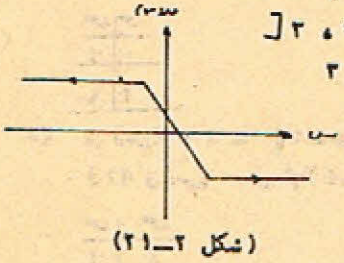
(٢) ∀ س ∈] −٢ ، ٣ [فان ق(س) = −(س − ٣) − (س + ٢)

ق(س) = ١ − ٢س

(٣) ∀ س ≥ ٣ فان ق(س) = (س − ٣) − (س + ٢) = −٥

اى

ق(س) = { ٥ ∀ س < −٢ ؛ ١ − ٢س ∀ س ∈] −٢ ، ٣ [؛ −٥ ∀ س ≥ ٣ }



(شكل ٢−٢١)

تمارين ٢−٢

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :−

١) ق(س) = |س|
٢) ق(س) = − |س|
٣) ق(س) = س |س|
٤) ق(س) = |س + ٣|
٥) ق(س) = |٣ − س|
٦) ق(س) = − |س + ٣|
٧) ق(س) = |٢س² − ٨|
٨) ق(س) = |س² − ٨| + س²
٩) ق(س) = |٤س² − ١|
١٠) ق(س) = |٥س² − ٤| + ٣
١١) ق(س) = |س² + ١٠س + ١٢|
١٢) ق(س) = − |٣س² − ٧| − ٢
١٣) ق(س) = س + |س|
١٤) ق(س) = |٢س − ٦| + س + ١
١٥) ق(س) = س |س| − ٢
١٦) ق(س) = |س + ٣| − |س − ٢|

١٧) ق(س) = |س| + |س ـ ٣|

١٨) ق(س) = ٣ |٢س + ١٠| ـ ٤

١٩) ق(س) = |٢س + ٦| + |٢س ـ ٤|

٢٠) ق(س) = |٢س ـ ٨|

٢١) ق(س) = |ـ ٢س + ٧|

٢٢) ق(س) = |ـ ٣س ـ ١٢|

٢٣) ق(س) = |٥س ـ ١٠| + ٣

٢٤) ق(س) = ـ |٥س ـ ١٥| + ٤

٢٥) ق(س) = |ـ ٢س٢ + ٥|

٢٦) ق = ح ← ح بحيث

ق(س) = { |س ـ ٣| / (٣ ـ س) ∀ س ≠ ٣ ؛ ـ ٥ اذا كانت س = ٣ }

٢٧) ق(س) = س|س| ـ س٢

٢٨) ق(س) = س|س| + س٢

٢٩) ق: ح ← ح بحيث ق(س) = { ٢٧ ـ ٣س٢ اذا كان س عدد حقيقي غير صحيح ؛ صفر اذا كان س عدد صحيح }

٣٠) ق: ح ← ح بحيث ق(س) = |س + ١| + |س ـ ٢| + س

٣١) ق: ح ← ح بحيث ق(س) = |س + ١| ـ |س ـ ٢| + س

رابعا ـ كل تطبيق من النوع ق(س) = أ س٣ + ب حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفر

(١) يرسم على شكل ... اى متزايد اذا كان أ موجبا

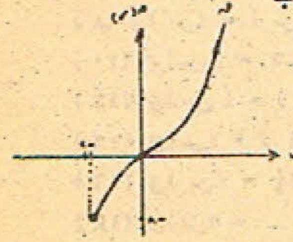
(٢) يرسم على شكل ... اى متناقص اذا كان أ سالبا

امثلــة

(١) ليكن ق = أ ← ح بحيث ق(س) = س٣

حيث أ = {س: س ∈ ح ، س ≥ ـ٢}

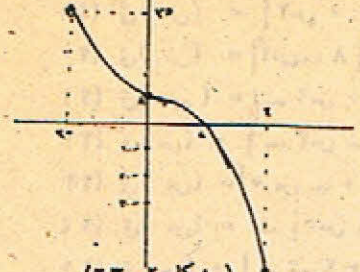
س	ص
ـ ٢	ـ ٨
٠	٠



(شكل ٢ـ٢٢)

(٢) ق : [ـ ٣ ، ٤] ⟵ ح بحيث ق(س) = ٨ ـ س٣

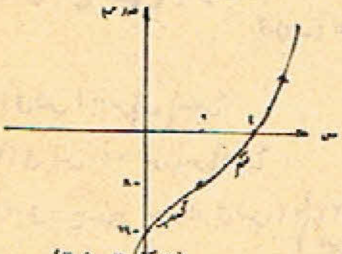
س	ص
ـ ٣	٣٥
٤	ـ ٥٦
٠	٨
٢	٠



(شكل ٢ـ٢٣)

(٣) ق(س) = (س ـ ٢)٣ ـ ٨

س	ص
٠	ـ ١٦
٤	٠
٢	ـ ٨



(شكل ٢ ـ ٢٤)

تمارين ٢ـ٣

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ـ

(١) ق(س) = ـ س٣ (٢) ق (س) = س٣ ـ ٢ (٣) ق (س) = س٣ + ٢

(٤) ق(س) = ٢س٣ ـ ٣ (٥) ق (س) = ـ ٢س٣ + ١

(٦) ق(س) = (س ـ ٢)٣ (٧) ق(س) = ـ (س ـ ٢)٣

(٨) ق(س) = (س ـ ٢)٣ + ٢ (٩) ق(س) = (س ـ ٢)٣ ـ ٢

(١٠) ق(س) = ٢ ـ (س ـ ٢)٣ (١١) ق(س) = ـ ٢ ـ (س ـ ٢)٣

(١٢) ق(س) = (٢ س + ٣)٣ (١٣) ق(س) = (٢س + ٣)٣ + ٢

(١٤) ق(س) = (٢س + ٣)٣ ـ ٢ (١٥) ق (س) = ٢ ـ (٢س + ٣)٣

(١٦) ق(س) = | ٢س٣ + ٤ | (١٧) ق(س) = | ـ ٢س٣ + ٤ | ـ ٣

(١٨) ق(س) = ـ | ٢س٣ ـ ٣ | + ٥ (١٩) ق(س) = | س٣ + ١ |

(٢٠) ق(س) = س | س٣ | + س٣

٥) التطبيقات السلمية

ق(س) = [س] حيث [س] = اكبر عدد صحيح ≤ س

او يعرف [س] = ن ⟺ ن ≤ س < ن + ١ حيث ن عدد صحيح

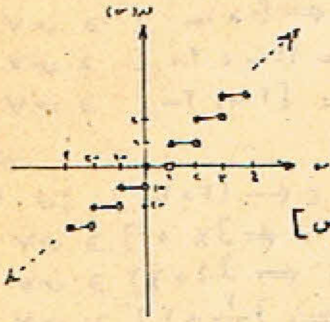
تمثلا

ق(٣) = [٣] = ٣

ق(١ر٣) = [١ر٣] = ٣

ق(ـ ٣) = [ـ٣] = ـ ٣

ق(ـ ١ر٣) = [ـ ١ر٣] = ـ٤



(شكل ٢ـ٢٥)

امثلـــة

١) ليكن ق = ح ⟵ ح بحيث ق (س) = [س]

∀ س ∋ [٠ ، ١[⟸ ق(س) = ٠

∀ س ∋ [١ ، ٢[⟸ ق(س) = ١

∀ س ∋ [٢ ، ٣[⟸ ق(س) = ٢

....

∀ س ∋ [ـ ١ ، ٠[⟸ ق(س) = ـ ١

∀ س ∋ [ـ٢ ، ـ ١[⟸ ق(س) = ـ٢

∀ س ∋ [ـ٣ ، ـ٢[⟸ ق(س) = ـ٣

....

٢) ليكن

ق : [ـ٢ ، ٤] ⟵ ح بحيث ق(س) = ـ٢ [س]



∀ س ∋ [٠ ، ١[⟸ ق(س) = ٠

∀ س ∋ [١ ، ٢[⟸ ق(س) = ـ٢

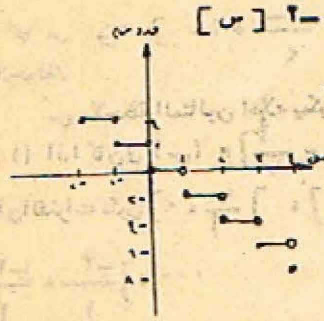
∀ س ∋ [٢ ، ٣[⟸ ق(س) = ـ٤

∀ س ∋ [٣ ، ٤[⟸ ق(س) = ـ ٦

ق (٤) = ـ ٨

∀ س ∋ [ـ١ ، ٠[⟸ ق(س) = ٢

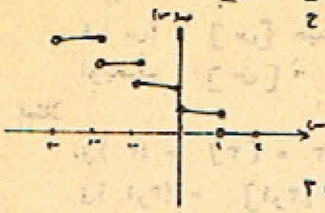
∀ س ∋ [ـ٢ ، ـ ١[⟸ ق(س) = ٤



(شكل ٢ـ ٢٦)

ليكن

٣) ق:]-٣ ، ٢] ← ح بحيث ق(س) = [٢-س]



∀س ∈]٠ ، ١] ⇐ ق(س) = ١

∀س ∈]١ ، ٢] ⇐ ق(س) = صفر

∀س ∈]-١ ، ٠] ⇐ ق(س) = ٢

∀س ∈]-٢ ، -١] ⇐ ق(س) = ٣

∀س ∈]-٣ ، -٢] ⇐ ق(س) = ٤

(شكل ٢-٢٧)

ليكن

٤) ق: [-٢ ، ٢] ← ح بحيث ق(س) = [٢س]

∀س ∈ [٠ ، ½[⇐ ق(س) = صفر

∀س ∈ [½ ، ١[⇐ ق(س) = ١

∀س ∈ [١ ، ٣/٢[⇐ ق(س) = ٢

∀س ∈ [٣/٢ ، ٢[⇐ ق(س) = ٣



ق(٢) = ٤

∀س ∈ [-½ ، ٠[⇐ ق(س) = -١

∀س ∈ [-١ ، -½[⇐ ق(س) = -٢

∀س ∈ [-٣/٢ ، -١[⇐ ق(س) = -٣

∀س ∈ [-٢ ، -٣/٢[⇐ ق(س) = -٤

ملاحظة/

من ملاحظة المثالين اعلاه يمكن وضع الاستنتاج التالي

(١) اذا كان ق(س) = [أ/ب س] وكانت أ/ب > صفر

فان الفترات تكون [٠ ، ب/أ[، [ب/أ ، ٢ب/أ[،

[٢ب/أ ، ٣ب/أ[، ...

(شكل ٢-٢٨)

(٢) واذا كانت أ/ب < ٠ فان الفترات تكون بالترتيب التالي :-

]٠ ، -ب/أ] ،]-ب/أ ، -٢ب/أ] ،]-٢ب/أ ، -٣ب/أ] ، ...

علما بأن -ب/أ في هذه الحالة كمية موجبة

مثال (٥) ق : ح ⟵ {−١، ١} بحيث ق(س) = $(-1)^{[س]}$

حيث [س] أكبر عدد صحيح ≥ س.

∀ س ∈ [٠، ١ [⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈ [١، ٢ [⟸ ق(س) = −١

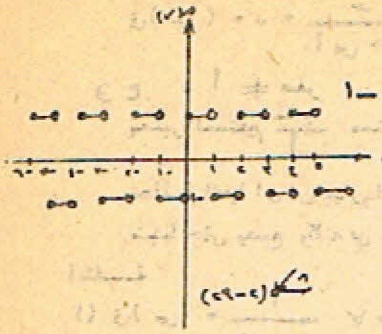
∀ س ∈ [٢، ٣ [⟸ ق(س) = ١

. . . . .

∀ س ∈ [−١، ٠ [⟸ ق(س) = −١

∀ س ∈ [−٢، −١ [⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈ [−٣، −٢ [⟸ ق(س) = −١



شكل (٢-٩)

تمارين ٢-٤

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :-

١) ق(س) = − [س]

٢) ق(س) = [س − ٣]

٣) ق(س) = [س + ٣]

٤) ق(س) = − [س − ٣]

٥) ق(س) = ٣ − [س]

٦) ق(س) = [س] + ٣

٧) ق(س) = [س] − ٣

٨) ق(س) = − [٣ + س]

٩) ق(س) = | [س] |

١٠) ق(س) = − | [س] |

١١) ق(س) = س − [س]

١٢) ق(س) = س + [س]

١٣) ق(س) = [س] − س

١٤) ق(س) = $\frac{س}{[س]}$ ∀ س ∉ [٠، ١ [

١٥) ق(س) = | س | + [س]

١٦) ق(س) = [$\frac{س}{٢}$]

١٧) ق(س) = | س − ١ − ٢ [$\frac{س}{٢}$] |

* ١٨) ق : [−٢، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = { [س] إذا كان س ∈ [−٢، ٠ [؛ −[س] إذا كان س ∈ [٠، ٢] }

* ١٩) ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { [١ − س] ∀ س ∈] −٢، ٢ [؛ | س − ٤ | ∀ س ∈ ح |] −٢، ٢ [}

٦) التطبيقات من النوع

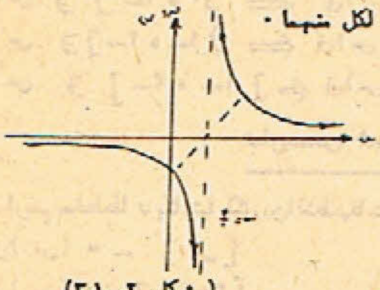
$ق(س) = د + \frac{ح}{أس + ب}$ حيث $س \neq \frac{-ب}{أ}$ ، أ، ب، ح، د ∈ ح ، أ ≠ صفر

يعتبر المستقيم $\frac{-ب}{أ}$ مستقيما محاذيا شاقوليا ويعتبر المستقيم ص= د مستقيما محاذيا افقيا اي ان بيان التطبيق لايقطع اي من المحاذيين انما يقترب من كل منهما حتى يصبح وكأنه في وضع مماس لكل منهما .

امثلـــة

١) $ق(س) = \frac{٢}{٢س-٣}$ ∀ $س \neq \frac{٣}{٢}$

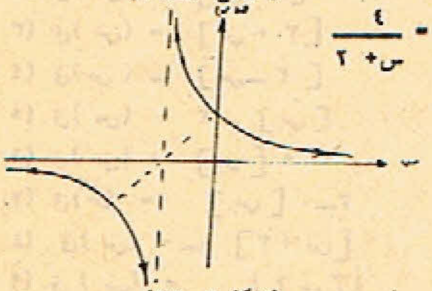
س	ص
٢	٢
٠	$\frac{-٢}{٣}$



(شكل ٢ـ٣١)

٢) ق: ح / {−٢} ⟶ ح بحيث $ق(س) = \frac{٤}{س+٢}$

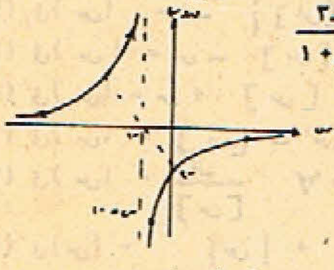
س	ص
٠	٢
٤	١
−٤	−٢
−١	٤



(شكل ٢ـ٣٢)

٣) ق: ح / {−١} ⟶ ح بحيث $ق(س) = \frac{-٣}{س+١}$

س	ص
٠	−٣
٢	−١
−٢	٣
−٤	١



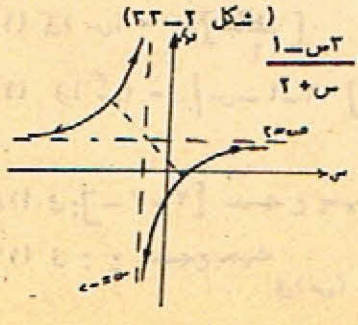
(شكل ٢ـ٣٣)

٤) ليكن ق: ح / {−٢} ⟶ ح بحيث $ق(س) = \frac{٣س-١}{س+٢}$

$ق(س) = \frac{٣(س+٢) - ١ - ٦}{س+٢} = ٣ - \frac{٧}{س+٢}$

س= −٢ المحاذي الشاقولي

ص= ٣ المحاذي الافقي



(شكل ٢ـ٣٤)

تمارين ٢ ـ ٥

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ـ

١) ق(س) = $\dfrac{١}{\text{س} - ١}$ ∀ س ≠ ١

٢) ق(س) = $\dfrac{١}{\text{س} + ١}$ حيث س ≠ −١

٣) ق (س) = $\dfrac{١}{\text{س}}$ + ١ حيث س ≠ ٠

٤) ق (س) = $\dfrac{١}{\text{س}}$ − ٢ حيث س ≠ ٠

٥) ق (س) = − $\dfrac{١}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠

٦) ق (س) = ٢ − $\dfrac{١}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠

٧) ق (س) = $\dfrac{٢}{\text{س} - ٢}$ حيث س ≠ ٢

٨) ق (س) = $\dfrac{[\text{س}]}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠

٩) ق (س) = $\dfrac{١}{|\text{س}|}$ حيث س ≠ ٠

١٠) ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢}{\text{س} + ١} & \forall\ \text{س} \in\ ]-١ ، ٢[\ \cup\ ]-٣ ، -١[\\ -[\text{س}] & \forall\ \text{س} > ٢ \\ -٢[\text{س}] & \forall\ \text{س} \leqslant -٢ \\ ٨ & \text{عندما س} = -١ \end{cases}$

١١) ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{-٣}{\text{س} + ٤} & \forall\ \text{س} \in\ ]-٤ ، ١[\\ \text{س}\,|\text{س}| - ١٦ & \forall\ \text{س} \notin\ ]-٤ ، ١[\end{cases}$

١٢) ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{-٢}{٢\text{س} - ٣} & \forall\ \text{س} \neq \dfrac{٣}{٢} \\ -٤ & \text{اذا كان س} = \dfrac{٣}{٢} \end{cases}$

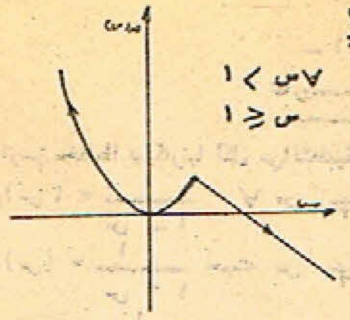
١٢) ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = $\begin{cases} \dfrac{-١}{|\text{س} + ٣|} & \forall\ \text{س} \neq -٣ \\ ٦ & \text{عندما س} = -٣ \end{cases}$

١) ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { ٢ ـ س ∀ س > ١ ؛ س٢ س ≤ ١ }

ص = ٢ ـ س ∀ س > ١ ص = س٢

س	ص
١	١
٢	٠

س	ص
±١	١
٠	٠



(شكل ٢ ـ ٣٥)

٢) ق :] ـ٢ ، ٢ [⟵ ح بحيث

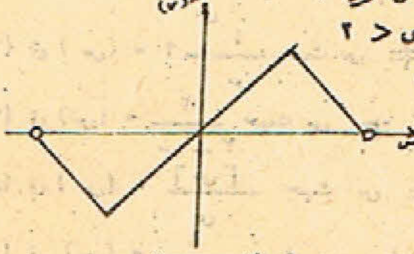
ق(س) = { ـ٢ ـ س اذا كانت ـ ٢ < س < ـ١ ؛ س اذا كانت ـ ١ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ ـ س اذا كانت ١ < س < ٢ }

ص = ـ٢ ـ س ص = س ص = ٢ ـ س

س	ص
ـ٢	٠
ـ١	ـ١

س	ص
ـ١	ـ١
١	١

س	ص
١	١
٢	٠



(شكل ٢ ـ ٣٦)

٣) ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { ٢ [س] ∀ س ∈ [ـ٣ ، ٣ [؛ |٧ ـ س| ∀ س ∈ ح / [ـ٣ ، ٣ [}

∀ س ∈ [٠ ، ١ [⟸ ق(س) = ٠

∀ س ∈ [١ ، ٢ [⟸ ق(س) = ٢

∀ س ∈ [٢ ، ٣ [⟸ ق(س) = ٤

∀ س ∈ [ـ١ ، ٠ [⟸ ق(س) = ـ٢

∀ س ∈ [ـ٢ ، ـ١ [⟸ ق(س) = ـ٤

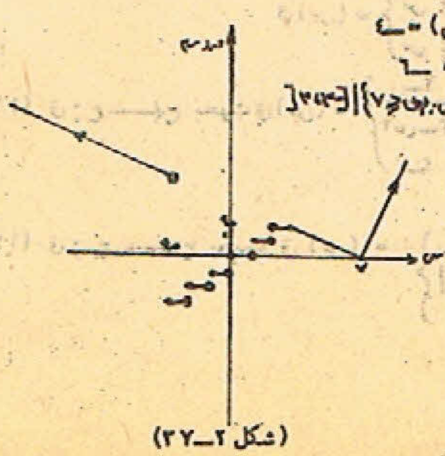
∀ س ∈ [ـ٣ ، ـ٢ [⟸ ق(س) = ـ٦

|٧ ـ س| = { ٧ ـ س ∀ س ∈]س : س ≤ ٧{ / [ـ٣ ، ٣[؛ س ـ ٧ ∀ س > ٧ }

ص = س ـ ٧ ص = ٧ ـ س

س	ص
٧	٠
١٠	٣

س	ص
٧	٠
٣	٤
ـ٣	١٠ ≠



(شكل ٢ ـ ٣٧)

٤) ق: ح ← ح بحيث

ق(س) = { $[\frac{س}{٢}]$ ∀ س ∈ [٠ ، ٦[
  $\frac{١٠ - س}{٢٠}$ ∀ س ≥ ٦
  −س^٢ ∀ س ح^−

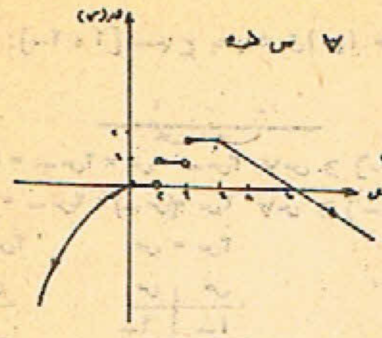
∀ س ∈ [٠ ، ٢[⇐ ق(س) = ٠
∀ س ∈ [٢ ، ٤[⇐ ق(س) = ١
∀ س ∈ [٤ ، ٦[⇐ ق(س) = ٢

ص = $\frac{١٠ - س}{٢}$

س	ص
٦	٢
١٠	٠

ص = −س^٢

س	ص
٠	٠
∓١	−١



(شكل ٢ − ٣٨)

٥) ق: ح ← ح بحيث

ق(س) = { |س^٢ − ٤| ∀ س ∈ [−٣ ، ٣[
  $\frac{٥}{٢}$(٥ − س) ∀ س ≥ ٣
  $\frac{٥}{٢}$(٥ + س) ∀ س ≤ ٣

لندرس التطبيق ق: ح ← ح بحيث ق(س) = |س^٢ − ٤| وبعد ذلك نرسم السؤال المطلوب

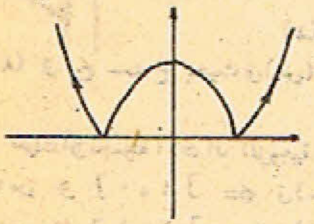
ق(س) = { −س^٢ + ٤ ∀ (س^٢ − ٤) < صفر ⇐ ∀ س ∈]−٢ ، ٢[
  −٤ + س^٢ ∀ (س^٢ − ٤) ≥ صفر ⇐ ∀ س ∈ ح /]−٢ ، ٢[

ص = س^٢ − ٤

س	ص	
−٢	٠	∈
٢	٠	∈
٠	−٤	∉

ص = ٤ − س^٢

س	ص	
−٢	٠	∉
٢	٠	∉
٠	٤	∈



(شكل ٢ −٣٩)

والان يمكن رسم التطبيق السابق كما يلي :−

ص = $\frac{٥}{٢}$ (٥ − س)

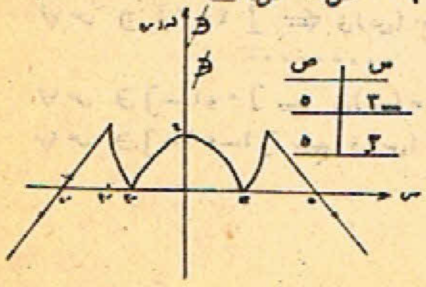
س	ص
٣	٥
٥	٠

ص = $\frac{٥}{٢}$ (٥ + س)

س	ص
−٣	٥
−٥	٠

ص = س^٢ − ٤

س	ص
−٣	٥
٣	٥



(شكل ٢ −٤٠)

مثال ٦)

ليكن ق :[−٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = { −س٢ |س| ∀ س ∈ [−١ ، ١] ؛ ١ ∀ س ∉ [−١ ، ١] }



ق(س) = −س٢ × س = −س٣ ∀ س ∈ [صفر ، ١]

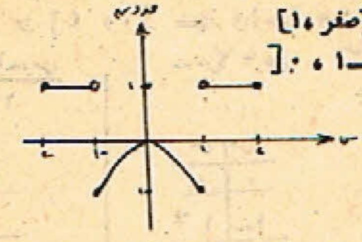
ق(س) = −س٢ × (−س) = س٣ ∀ س ∈ [−١ ، ٠ [

ص = −س٢

س	ص
١	−١
٠	٠

ص = س٢

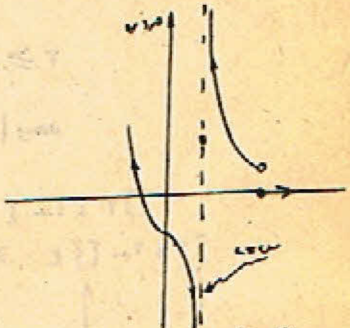
س	ص
−١	−١
٠	٠



(شكل ٢−٤١)

مثال ٧) ق = ح ⟵ ح بحيث

ق(س) = { ٢/(س−٢) ∀ س ∈]٠ ، ∞[/ {٢} ؛ س٢ − ٢/٢ ∀ س < صفر ؛ صفر ∀ س ≥ ٠ عندما س = ٢ }



(شكل ٢−٤٢)

مثال ٨) ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { أ − س ∀ س ∈ [ب ، أ[؛ س − أ ∀ س ∈ [أ ، ب[}

حيث أ ∈ مجموعة الاعداد الزوجية وان أ ، ب عددان صحيحان متتاليان

∀ س ∈ [٠ ، ١[⟸ ق(س) = س − ٠ = س

∀ س ∈ [١ ، ٢[⟸ ق(س) = ٢ − س

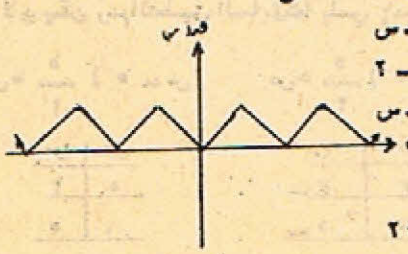
∀ س ∈ [٢ ، ٣[⟸ ق(س) = س − ٢

∀ س ∈ [٣ ، ٤[⟸ ق(س) = ٤ − س

. . . .

∀ س ∈ [−١ ، ٠[⟸ ق(س) = −س

∀ س ∈ [−٢ ، −١[⟸ ق(س) = س + ٢



(شكل ٢−٤٣)

امثلة على التطبيقات العددية المتناظرة

١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = س + س٣

برهن ان ق متناظر مع نقطة الاصل

البرهان

ق(س) = س + س٣

ق(ــ س) = ــ س ــ س٣

ــ ق (ــ س) = س + س٣

∴ ق(س) = ــ ق (ــ س) ∀ س ∋ ح

∴ متناظر مع نقطة الاصل

٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = س٢ ــ س٤ + ١٦ فبرهن ان ق متناظر مع المحور الثاني .

البرهان

∴ ق(س) = س٢ ــ س٤ + ١٦

∴ ق (ــ س) = س٢ ــ س٤ + ١٦ = ق(س)

∴ ق متناظر مع المحور الثاني

٣) ليكن ق = ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٣ ــ س٣

١) هل ق متناظر مع المحور الثاني ؟ برهن قولك

٢) هل ق متناظر مع نقطة الاصل؟ برهن قولك

ق غير متناظر مع نقطة الاصل . وغير متناظر مع المحور الثاني

البرهان

∴ ق (س) = ٣ ــ س٣

∴ ق(ــ س) = ٣ + س٣ ≠ ق(س)

∴ غير متناظر مع المحور الثاني

ــ ق (ــ س) = ــ ٣ ــ س٣ ≠ ق(س)

∴ غير متناظر مع نقطة الاصل

٤) ليكن ق : [ــ٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = س٢ |س|

هل ق متناظر مع المحور الثاني ؟

برهن قولك . وارسم ق في المستوى الاقليدي

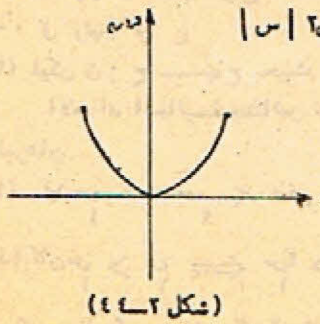
البرهان

∀ س ∋ [٠ ، ٢] فان ق(س) = س٣

و ∀ س ∋ [ــ٢ ، ٠[فان ق(س) = ــ س٣

ان هذا التطبيق يسلك سلوك التطبيق

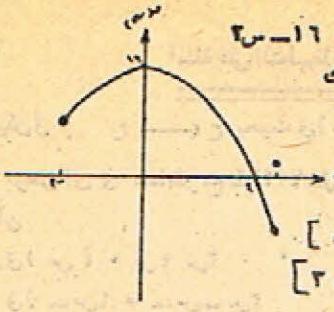
ق(س) = س٢ والذي يكون متناظر مع المحور الثاني



(شكل ٢ــ ٤٤)

٥) ليكن ق : [ـ ٣ ، ٥] ⟵ ح بحيث ق(س) = ١٦ ـ $س^2$

١ـ هل ان ق متناظر مع المحور الثاني ؟ برهن قولك



(شكل ٢ـ٤٥)

البرهان

من ملاحظة المخطط المجاور

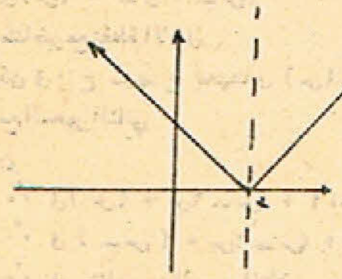
∃ (٤ ، ٠) ∈ ق ولكن (ـ ٤ ، ٠) ∉ ق

∴ ق غير متناظر مع المحور الثاني ∀ س ∈ [ـ ٣ ، ٥]

ولكنه يكون متناظرا مع المحور الثاني ∀ س ∈ [ـ ٣ ، ٣]

٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = |٣ ـ س|

هل ق متناظر مع المحور الثاني ؟ برهن قولك



(شكل ٢ـ٤٦)

من الشكل المجاور نلاحظ انه

∃ (٣ ، ٠) ∈ ق وان (ـ ٣ ، ٦) ∈ ق

اى انه ∃ ٣ ∈ ح و ∃ ـ ٣ ∈ ح لكن

ق(ـ ٣) ≠ ق(٣)

∴ ق غير متناظر مع المحور الثاني لكنه متناظر مع المستقيم س = ٣

امثلة على التطبيقات العددية المتزايدة والمتناقصة

١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = $س^3$ ـ ٤ برهن ان ق متزايد

البرهان :

∀ $س_1$ ، ∀ $س_2$ ∈ ح

اذا كان $س_1 < س_2$ ⟸ $س_1^3 < س_2^3$ ⟸ $س_1^3$ ـ ٤ < $س_2^3$ ـ ٤ ⟸ ق($س_1$) < ق($س_2$)

∴ ق متزايد ∀ س ∈ ح

∴ ق رتيب في ح

٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٨ ـ ٣$س^2$ ، برهن ان ق متزايد في الاعداد السالبة ومتناقص في الاعداد الموجبة .

البرهان

١) ∀ $س_1$ ، $س_2$ < صفر

اذا كان $س_1 < س_2$ ⟸ $س_1^2 > س_2^2$ ⟸ ـ $س_1^2$ < ـ $س_2^2$ ⟸ ـ٣$س_1^2$ < ـ٣$س_2^2$

⟸ ٨ ـ ٣$س_1^2$ < ٨ ـ ٣$س_2^2$ ⟸ ق($س_1$) < ق($س_2$)

∴ ق متناقص ∀ س < ٠

٢) ∀ س$_١$ ، س$_٢$ < صفر

اذا كان س$_١$ < س$_٢$ ⇐ س$_١^٢$ > س$_٢^٢$ ⇐ −س$_١^٢$ < −س$_٢^٢$ ⇐ −٢س$_١^٢$

< −٢س$_٢^٢$ ⇐ ٨−٢س$_١^٢$ < ٨−٢س$_٢^٢$ ⇐ ق(س$_١$) < ق(س$_٢$)

∴ ق متزايد ∀ س < صفر

٣) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = ٤ − |٢−س| برهن ان ق متزايد

∀ س < ٢ ومتناقص ∀ س > ٢

(١) ∀ س$_١$ ، س$_٢$ > ٢

اذا كان ٢ < س$_١$ < س$_٢$ ⇐ −٢ > −س$_١$ > −س$_٢$ $\xleftarrow{\text{باضافة (٢)}}$ صفر > ٢−س$_١$ >

٢−س$_٢$ ⇐ صفر < |٢−س$_١$| < |٢−س$_٢$| $\xleftarrow{\text{بالضرب في −١}}$ − |٢−س$_١$| >

−|٢−س$_٢$| $\xleftarrow{\text{باضافة ٤}}$ ٤ − |٢−س$_١$| > ٤ − |٢ − س$_٢$| ⇐ ق(س$_١$)

> ق(س$_٢$)

∴ ق متناقص ∀ س > ٢

(٢) ∀ س$_١$ ، س$_٢$ < ٢

اذا كان س$_١$ < س$_٢$ < ٢ $\xleftarrow{\text{بالضرب في −١}}$ −س$_١$ > −س$_٢$ > −٢ $\xleftarrow{\text{باضافة ٢}}$ ٢−س$_١$ >

٢−س$_٢$ > ٠ ⇐ |٢−س$_١$| > |٢−س$_٢$| > ٠ $\xleftarrow{\text{بالضرب في −١}}$ − |٢−س$_١$| <

−|٢−س$_٢$| < ٠ $\xleftarrow{\text{باضافة ٤}}$ ٤ − |٢−س$_١$| < ٤ − |٢ − س$_٢$| ⇐ ق(س$_١$) <

ق(س$_٢$) ⇐ ق متزايد ∀ س < ٢

٤) ق : ح / {٢} ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{-٣}{٢-س}$ برهن ان ق متناقص في منطلقه

∀ س$_١$ ، س$_٢$ ∈ ح / {٢}

اذا كان س$_١$ < س$_٢$ $\xleftarrow{\text{بالضرب × −١}}$ −س$_١$ > −س$_٢$ $\xleftarrow{\text{باضافة ٢}}$ ٢−س$_١$ > ٢−س$_٢$

⇐ $\frac{١}{٢-س_١}$ < $\frac{١}{٢-س_٢}$ $\xleftarrow{\text{بالضرب في ٣}}$ $\frac{٣}{٢-س_١}$ < $\frac{٣}{٢-س_٢}$

$\xleftarrow{\text{بالضرب × −١}}$ $\frac{-٣}{٢-س_١}$ > $\frac{-٣}{٢-س_٢}$ ⇐ ق(س$_١$) > ق(س$_٢$)

∴ ق متناقص ∀ س ∈ ح / {٢}

٥) ليكن ق : $\text{ح} / \{-1\} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٤}{\text{س} + ١}$

برهن ان ق متزايد في منطلقه

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٤}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س} + ١ - ١ - ٤}{\text{س} + ١}$ حيث $\text{س} \neq -١$

$= \frac{(\text{س} + ١) - ٥}{(\text{س} + ١)} = ١ - \frac{٥}{\text{س} + ١}$ حيث $\text{س} \neq -١$

$\therefore \forall \text{س}_١ ، \forall \text{س}_٢ \in \text{ح} / \{-١\}$

اذا كان $\text{س}_١ < \text{س}_٢ \xLeftarrow{\text{باضافة } ١} \text{س}_١ + ١ < \text{س}_٢ + ١ \Leftarrow \frac{١}{\text{س}_١ + ١} > \frac{١}{\text{س}_٢ + ١}$

$\xLeftarrow[\text{واضافة } ١]{\text{بالضرب} \times (-٥)} ١ - \frac{٥}{\text{س}_١ + ١} < ١ - \frac{٥}{\text{س}_٢ + ١}$ $\quad \text{ق}(\text{س}_١) < \text{ق}(\text{س}_٢)$

$\therefore$ ق متزايد في منطلقه .

ملاحظة / يمكن كتابة $\text{ق}(\text{س}) = ١ - \frac{٥}{\text{س} + ١}$ بقسمة البسط (س − ٤) على المقام (س + ١) قسمة مطولة

٦) ليكن ق : $\text{ح} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = -٤\text{س} - \text{س}^٢$ برهن ان ق متزايد $\forall \text{س} < -٢$ ومتناقص $\forall \text{س} > -٢$

$\text{ق}(\text{س}) = -٤\text{س} - \text{س}^٢$

$= ٤ - ٤ - ٤\text{س} - \text{س}^٢$ باضافة وطرح ٤

$= ٤ - (٤ + ٤\text{س} + \text{س}^٢)$

$= ٤ - (٢ + \text{س})^٢$

(١) $\forall \text{س}_١ ، \text{س}_٢ < -٢$

اذا كان $\text{س}_١ < \text{س}_٢ < -٢ \xLeftarrow{\text{باضافة } ٢} ٢ + \text{س}_١ < ٢ + \text{س}_٢ < \text{صفر} \xLeftarrow{\text{بالتربيع}}$

$(٢ + \text{س}_١)^٢ > (٢ + \text{س}_٢)^٢ > \text{صفر} \xLeftarrow{\text{بالضرب في } -١} -(٢ + \text{س}_١)^٢ <$

$-(٢ + \text{س}_٢)^٢ \therefore \xLeftarrow{\text{باضافة } ٤} ٤ - (٢ + \text{س}_١)^٢ < ٤ - (٢ + \text{س}_٢)^٢ \Longrightarrow \text{ق}(\text{س}_١) < \text{ق}(\text{س}_٢)$ $\therefore$ ق متزايد $\forall \text{س} < -٢$

(٢) ∀ $س_١$ ، $س_٢$ > −٢

اذا كان −٢ < $س_١$ < $س_٢$ ⟸ (باضافة ٢) صفر < ٢ + $س_١$ < ٢ + $س_٢$ ⟸ (بالتربيع)

صفر < $(٢ + س_١)^٢$ < $(٢ + س_٢)^٢$ ⟸ (بالضرب في −١) $-(٢ + س_١)^٢$ >

$-(٢ + س_٢)^٢$ ⟸ (باضافة ٤) ٤ $-(٢ + س_١)^٢$ > ٤ $-(٢ + س_٢)^٢$ ⟸

ق ($س_١$) > ق ($س_٢$)

∴ ق متناقص ∀ س > −٢

٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = [س − ٢]

برهن ان ق متزايد في مجموعة الاعداد الصحيحة

∀ $س_١$ ، $س_٢$ ∈ ص

اذا كان $س_١$ < $س_٢$ ⟸ (باضافة −٢) $س_١$ − ٢ < $س_٢$ − ٢ ⟸ [$س_١$ − ٢] < [$س_٢$ − ٢]

⟸ ق ($س_١$) < ق ($س_٢$)

∴ ق متزايد في ص

امثلة على التطبيقات العددية المحددة وغير المحددة

---

١) ليكن ق : [−٢ ، ٤[⟵ ح بحيث ق (س) = ٣ − ٢س برهن ان ق محدد

∵ −٢ ≤ س < ٤ بالفرض ⟸ (بالضرب في −٢)

−٤ ≥ −٢س > −٨ ⟸ (بالضرب في −١)

٤ ≤ ٢س < ٨ ⟸ (باضافة ٣)

٧ ≥ ٣ − ٢س > −٥ ⟸ | ق (س) | ≤ ٧

∴ ق محدد

٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ٨ − ٣$س^٢$ برهن ان ق محدد من الاعلى

∀ س ∈ ح فان $س^٢$ ≥ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

٣$س^٢$ ≥ صفر بالضرب في ٣

−٣$س^٢$ ≤ صفر بالضرب في −١

٨ − ٣$س^٢$ ≤ ٨ باضافة ٨

ق (س) ≤ ٨

∴ ق محدد من الاعلى

٣) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = س٢ + س ـ ٤ برهن ان ق محدود من الاسفل

ق (س) = س ٢ + س ـ ٤

= س٢ + س + ¼ ـ ¼ ـ ٤ باضافة وطرح ¼

= (س + ½)٢ ـ $\frac{١٧}{٤}$

∀ س ∈ ح فان (س + ½)٢ ≥ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

(س + ½)٢ ـ $\frac{١٧}{٤}$ ≥ ـ $\frac{١٧}{٤}$ باضافة $\frac{-١٧}{٤}$

∴ ق (س) ≥ $\frac{-١٧}{٤}$

∴ ق محدود من الاسفل

٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ٤ ـ | س + ٢ | برهن ان ق محدود من الاعلى

∀ س ∈ ح فان | س + ٢ | ≥ ٠

∴ ـ | س + ٢ | ≤ صفر بالضرب في ـ١

٤ ـ | س + ٢ | ≤ ٤ باضافة ٤ للطرفين

ق (س) ≤ ٤

∴ ق محدود من الاعلى

٥) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{١}{س٢ + ١}$ برهن أن ق محدود

١) ∀ س ∈ ح فان س٢ ≥ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

س٢ + ١ ≥ ١ باضافة ١ للطرفين

$\frac{١}{س٢ + ١}$ ≤ ١ (خواص الاعداد الحقيقية)

ق (س) ≤ ١

∴ ق محدود من الاعلى

٢) ∵ س٢ ≥ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

س٢ + ١ ≥ ١ > صفر

∴ $\frac{١}{س٢ + ١}$ > صفر

ق (س) > صفر ∴ ومحدود من الأسفل

∴ ق محدود

ملاحظة / يمكن استخدام الطريقة الواردة في المثال الثامن من هذا الموضوع لبرهنة المثال (٥) اعلاه .

٦) ليكن ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$ برهن ان ق محدود من الاعلى وغير محدود من الاسفل

(١) ∀ س ∈ ح / {٠} فان $س^{٢}$ > صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

∴ $\frac{١}{س^{٢}}$ > صفر

∴ $-\frac{١}{س^{٢}}$ < صفر

∴ ق (س) < صفر

∴ ق محدود من الاعلى

(٢) ∀ ص ∈ ح̄ (اكبر مدى للتطبيق)

فانه ∃ $\frac{١}{\sqrt{١-ص}}$ ∈ منطلق التطبيق بحيث

ق($\frac{١}{\sqrt{١-ص}}$) = $\frac{-١}{\frac{١}{١-ص}}$ = ص - ١ < ص

∴ ق غير محدود من الاسفل .

٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $٣س^{٢} - ٢٧$ برهن أن ق محدود من الاسفل وغير محدود من الاعلى .

(١) ∀ س ∈ ح فان $س^{٢}$ ≥ صفر ⟸ $٣س^{٢}$ ≥ صفر ⟸ $٣س^{٢} - ٢٧$ ≥ -٢٧ ⟸ ق (س) ≥ -٢٧

∴ ق محدود من الاسفل

(٢) اكبر مدى للتطبيق هو { ص : ص ≥ -٢٧ }

∴ ∀ ص ≥ -٢٧ فانه ∃ $\sqrt{\frac{ص+٢٨}{٣}}$ ∈ منطلق ق

بحيث ق ($\sqrt{\frac{ص+٢٨}{٣}}$) = ٣($\sqrt{\frac{ص+٢٨}{٣}}$)^{٢} -٢٧ = ص + ١ > ص

∴ ق غير محدود من الاعلى

٨) ليكن ق : ح ⟵ ح . بحيث ق(س) = $\frac{١ - س^٢}{١ + س^٢}$ برهن ان ق محدود

نفرض ق(س) = ص = $\frac{١ - س^٢}{١ + س^٢}$

∴ ص + ص س٢ = ١ ـ س٢

س٢ (١ + ص) = ١ ـ ص

س٢ = $\frac{١ - ص}{١ + ص}$

س = ± $\sqrt{\frac{١ - ص}{١ + ص}}$

	١		١ـ
اشارة ١ـص	------	++++	+++
اشارة ١+ص	+++	++++	-----
اشارة (١ـص) (١+ص)	----	+++	----

∴ ـ ١ < ص ⩽ ١

∴ ـ ١ < ق (س) ⩽ ١

∴ | ق (س) | ⩽ ١

∴ ق محدود

٩) ليكن ق :] ٠ ، ٢ [⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{١}{س}$

(١) هل يكون ق محدود من الاعلى ؟ برهن قولك

(٢) هل يكون ق محدود من الاسفل ؟ برهن قولك

(١) ليكن ل ∈ ح++ (اكبر مدى للتطبيق)

∴ ل > صفر ⟸ ل + ١ > ١

∴ ٠ < $\frac{١}{ل + ١}$ < ١ ⟸ ٠ < $\frac{١}{ل + ١}$ < ٢

ق($\frac{١}{ل + ١}$) = $\frac{١}{\frac{١}{ل + ١}}$ = ل + ١ > ل

∴ ق غير محدود من الاعلى

(٢) س ∈] ٠ ، ٢ [بالفرض

∴ س < ٢ ⟸ س ـ ٢ < ٠ ⟸ $\frac{١}{س - ٢}$ < ـ ½ ⟸ ق(س)

< ـ ½

∴ ق محدود من الاعلى

١٠) ليكن ق :] ٠ ، ٢ [⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{١}{س - ٢}$

(١) هل يكون ق محدود من الاعلى؟ برهن قولك

(٢) هل يكون ق محدود من الاسفل؟ برهن قولك

(١) ∀ ص ∈ ح بحيث ص < -½ فانه ∃ ($\frac{٢ص - ١}{ص - ١}$) ∈] ٠ ، ٢ [

بحيث ق ($\frac{٢ص - ١}{ص - ١}$) = $\frac{١}{\frac{٢ص - ١}{ص - ١} - ٢}$ = ص - ١ < ص

∴ ق غير محدود من الاسفل

١١) ليكن ق: [-٩ ، ٩] ⟵ ح بحيث ق (س) = $\sqrt{٨١ - س^٢}$

برهن ان ق محدود

ليكن ص = ق (س)

ص = $\sqrt{٨١ - ص^٢}$

$ص^٢$ = ٨١ - $س^٢$

$س^٢$ = ٨١ - $ص^٢$

س = ± $\sqrt{٨١ - ص^٢}$

س = ± $\sqrt{(٩ - ص) (٩ + ص)}$

∴ ص ∈ [-٩ ، ٩]

ولكن ص ≥ صفر ∀ س ∈ [-٩ ، ٩]

∴ ٠ ≤ ص ≤ ٩

∴ ٠ ≤ ق (س) ≤ ٩

∴ ق محدود

		٩	-٩
اشارة ٩ - ص	----	++++	+++
اشارة ٩ + ب	+++	++++	---
اشارة (٩ - ص)(٩ + ص)	---	++++	---

* امثلة على اعظم قيمة واوطأ قيمة للتطبيق *

(١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ٨ - ٢$س^٢$

هل يمتلك ق اعظم قيمة ؟ وهل يمتلك أصغر قيمة ؟ برهن قولك

الحل/ بما ان ق (س) ≤ ٨ (ق محدود من الاسفل ... برهن)

∴ (٨) اوطأ قيمة للتطبيق

وبما ان ق غير محدود من الاعلى ∴ لايمتلك اعظم قيمة

(٢) ليكن ق :] -٢ ، ٥ [⟵ ح بحيث ق (س) = ٨ - ٢س .

(١) هل يمتلك ق اعظم قيمة ؟ برهن قولك

(٢) هل يمتلك ق اوطأ قيمة ؟ برهن قولك

س ∈] -٢ ، ٥ [⟸ -٢ < س ≤ ٥ ⟸ -٦ < ٢س ≤ ١٠ ⟸ ٦ > -٢س ≥ -١٠ ⟸ ١٤ > ٨ - ٢س ≥ -٢ ⟸

١٤ > ق (س) ⩾ ـ٢

∴ ق محدود

(١) بما ان ق (س) ⩾ ـ٢ ∀ س ∈] ـ٢ ، ٥]

وتوجد ٥ ∈ المنطلق بحيث ق(٥) = ـ٢

∴ ـ٢ أصغر قيمة للتطبيق

(٢) بما انه لايوجد س١ ∈] ـ٢ ، ٥] بحيث ق(س١) = ١٤

∴ ق لايمتلك اعظم قيمة

امثلة عامة

مثال ١) ليكن ق :] ـ٤ ، ٥] ⟵ ح بحيث

ق (س) = { ـ [س] ∀ س ∈ [٢ ، ٥] ؛ س|س| ـ ١ ∀ س ∈] ـ٢ ، ٢ [؛ ـ١ / (س + ٢) ∀ س ∈] ـ٣ ، ـ٢ [؛ ـ٢س ـ ٥ ∀ س ∈] ـ٤ ، ـ٣ [

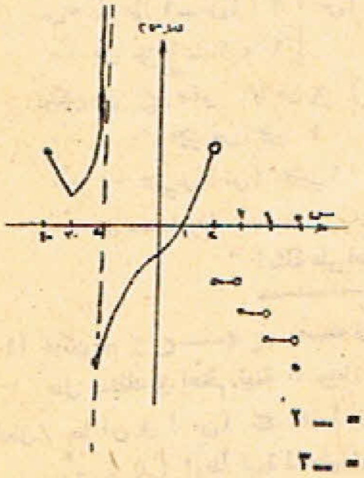
(١) مثل ق ديكارتيا

(٢) برهن ان ق متزايد في] ـ٢ ، ٢ [

(٣) برهن ان ق متناقص في] ـ٤ ، ـ٣ [

(٤) جد اعظم قيمة للتطبيق ⊖ ق

(٥) برهن ان ق غير محدود من الاعلى وحدود من الاسفل



(٦) جد ان امكن [(ق ∘ ق) ∘ ق] (ـ١)

الجواب/

(١) ∀ س ∈ [٢ ، ٣ [⟸ ق (س) = ـ٢

∀ س ∈ [٣ ، ٤ [⟸ ق (س) = ـ٣

∀ س ∈ [٤ ، ٥ [⟸ ق(س) = ـ٤

عندما س = ٥ ⟸ ق (س) = ـ٥

∀ س ∈ [٠ ، ٢ [⟸ ق(س) = س٢ ـ ١

∀ س ∈] ـ٢ ، ٠ [⟸ ق (س) = ـ س٢ ـ ١

س + ٢ = ٠ ⟸ س = − ٢ المحاذي الشاقولي ، ق(− ٣) = ١

ق (س) = − ٢س − ٥

س	ص
−٣	١
−٤	٣

(٢) ∀ س ∈ [− ٢ ، ٠] ⟸ ق (س) = − س^2 − ١

∀ س$_1$ ، س$_2$ ∈ [− ٢ ، ٠]

اذا كان س$_1$ < س$_2$ ⟸ س$_1^2$ > س$_2^2$ ⟸ − س$_1^2$ < − س$_2^2$ ⟸

− س$_1^2$ − ١ < − س$_2^2$ − ١ ⟸ ق (س$_1$) < ق (س$_2$)

∴ ق متزايد ∀ س ∈ [− ٢ ، ٠]

∀ س ∈ [٠ ، ٢] ⟸ ق (س) = س^2 − ١

∀ س$_1$ ، س$_2$ ∈ [٠ ، ٢]

اذا كان س$_1$ < س$_2$ ⟸ س$_1^2$ < س$_2^2$ ⟸ س$_1^2$ − ١ < س$_2^2$ − ١ ⟸

ق (س$_1$) < ق(س$_2$)

∴ ق متزايد ∀ س ∈ [٠ ، ٢]

(٣) ∀ س ∈ [− ٤ ، − ٣] ⟸ ق(س) = − ٢س − ٥

∀ س$_1$ ، س$_2$ ∈ [− ٤ ، − ٣]

اذا كان س$_1$ < س$_2$ ⟸ − س$_1$ > − س$_2$ ⟸ − ٢س$_1$ > − ٢س$_2$ ⟸

− ٢س$_1$ − ٥ > − ٢س$_2$ − ٥ ⟸ ق(س$_1$) > ق(س$_2$)

∴ ق متناقص ∀ س ∈ [− ٤ ، − ٣]

(٤) اعظم قيمة لـ (⊖ ق) = − (اصغر قيمة لـ (ق))

وبما ان اصغر قيمة للتطبيق ق هي − ٥ لان

(١) ق (س) ≥ − ٥ ∀ س ∈ [− ٤ ، ٥]

(٢) ∃ ٥ ∈ [− ٤ ، ٥] بحيث ق (٥) = − ٥

∴ اعظم قيمة للتطبيق ⊖ ق هي ٥

(٥) ١) ق غير محدود من الاعلى لان ق (س) = $\frac{-١}{س+٢}$ ∀ س ∈]-٢ ، -٢.[

غير محدود من الاعلى ويمكن برهان ذلك كما يلي :-

∀ ص ≥ ١ ، ∃ ($\frac{-٣-٢ص}{ص+١}$) ∈]-٣ ، -٢[بحيث

ق ($\frac{-٣-٢ص}{ص+١}$) = $\frac{-١}{\frac{-٣-٢ص}{ص+١}+٢}$ = ص + ١ > ص

∴ ق غير محدود من الاعلى .

(٢) ∀ س ∈ [-٢ ، ٠] ⟸ ق(س) = -س² - ١

-٢ ≤ س < ٠ ⟸ ٤ ≥ س² > صفر ⟸ -٤ ≤ -س² ⟸

-٥ ≤ -س² - ١ ⟸ -٥ ≤ ق(س)

كذلك ∀ س ∈ [-٢ ، ٥] فان ق (س) ≥ -٥

∴ ق محدود من الاسفل

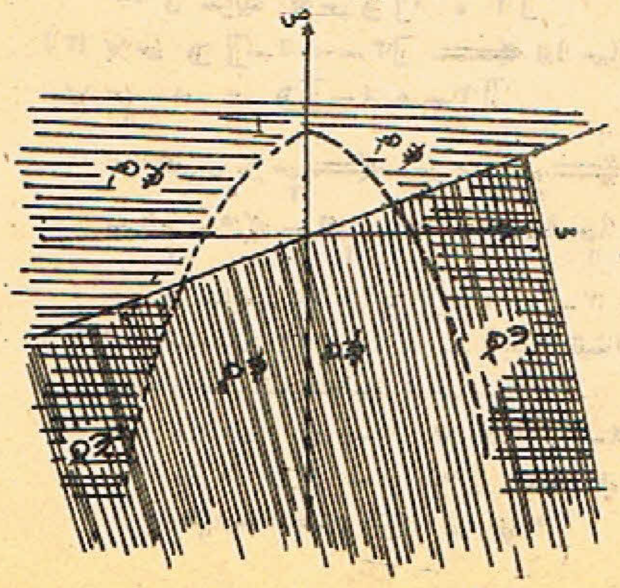
او يمكن برهنة ان ق محدود من الاسفل كما يلي

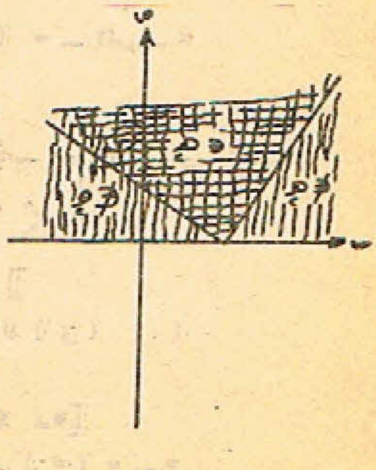
بما ان للتطبيق ق اصغر قيمة = -٥

∴ التطبيق محدود من الاسفل

مثال ٢) أ) ظلل مجموعة النقاط م = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ،
ص > ٩ - س² ، ٢س ≤ ٢ص }
في المستوى الاقليدي

ب) ظلل مجموعة النقاط م = { (س،ص) ، (س،ص) ∈ ح × ح ، ص ≥ |س - ٣| ، ص ≤ ٣ ، ٠ }





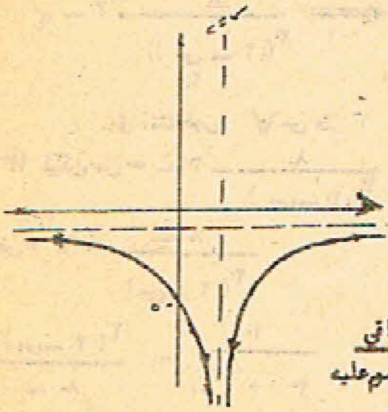
مثال ٣) ليكن ق : ح / { ٢ } ⟵ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٢٠}{٤\text{س} - \text{س}^٢ - ٤}$

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد $\forall$ س > ٢ ومتناقص $\forall$ س < ٢

(٣) برهن ان ق محدود من الاعلى

(٤) جد (ق ∘ ق) (صفر)

الحل/ـ $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٢٠}{٤\text{س} - \text{س}^٢ - ٤}$



(شكل ٢ـ٤٩)

$= -٣ - \dfrac{٨}{(\text{س} - ٢)^٢}$

وذلك بقسمة البسط على المقام كما يلي

$$\begin{array}{r|l} -٣ & \\ ٣\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٢٠ & -\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٤ \\ \mp ٣\text{س}^٢ \pm ١٢\text{س} \mp ١٢ & \\ \hline +٨ & \end{array}$$

وباستخدام الفكرة $\dfrac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{خارج القسمة} + \dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = -٣ + \dfrac{٨}{-\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٤} = -٣ - \dfrac{٨}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}$

$= -٣ - \dfrac{٨}{(\text{س} - ٢)^٢}$

المحاذي الافقي ص = −٣ ، المحاذي الشاقولي س = ٢

(٢) $\forall \text{س}_١ > ٢ ، \forall \text{س}_٢ > ٢$

اذا كان $٢ < \text{س}_١ < \text{س}_٢ \Leftarrow \text{صفر} < \text{س}_١ - ٢ < \text{س}_٢ - ٢ \Leftarrow \text{صفر} <$

$(\text{س}_١ - ٢)^٢ < (\text{س}_٢ - ٢)^٢ \Leftarrow \dfrac{١}{(\text{س}_١ - ٢)^٢} > \dfrac{١}{(\text{س}_٢ - ٢)^٢} > \text{صفر}$

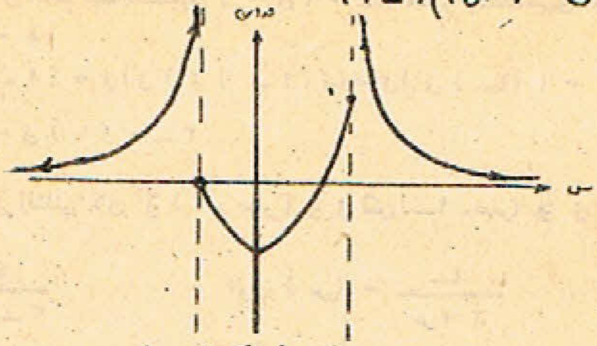
$\Leftarrow \dfrac{-٨}{(\text{س}_١ - ٢)^٢} < \dfrac{-٨}{(\text{س}_٢ - ٢)^٢} < \text{صفر} \Leftarrow -٣ - \dfrac{٨}{(\text{س}_١ - ٢)^٢}$

$< -٣ - \dfrac{٨}{(\text{س}_٢ - ٢)^٢} < -٣ \Leftarrow \text{ق}(\text{س}_١) < \text{ق}(\text{س}_٢)$

$\therefore$ ق متزايد $\forall$ س > ٢

$\forall \text{س}_٣ < ٢ ، \forall \text{س}_٤ < ٢$

(٥) جد (ق ∘ ق ∘ ق)(ــ ٢) (٦) هل يتناظر ق مع المحور الثاني فـي [ــ٢ ، ٢] (٧) جد س ∈ ح بحيث ق (س) = ١٠٠ (٨) جد ((ق ⊕ ق ⊕ (٣ق))(ــ ١)



(شكل ٢ــ٥٠)

٢) $\forall س_1 > -٢ ، \forall س_2 > -٢$

اذا كان $س_1 > س_2 > -٢ \Longrightarrow$

$٢ + س_2 + ٢ > صفر \Longrightarrow$

$< \frac{١}{س_1 + ٢} < \frac{١}{س_2 + ٢} \Longrightarrow$

$صفر > \frac{-٤}{س_1 + ٢} > \frac{-٤}{س_2 + ٢}$

$\Longrightarrow ق(س_1) > ق(س_2) \quad \forall س > -٢$

∴ ق متزايد $\forall س > -٢$

٣) اما ان نبرهن ق (س) = $\frac{٤}{س - ٣}$ $\forall س > ٣$ غير محدود من الاعلى

او ان نبرهن ق (س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ $\forall س > -٢$ غير محدود من الاعلى

ولنأخذ الحالة الاولى

$\forall ل > صفر ، \exists س = (٣ + \frac{٤}{ل + ١}) > ٣$ بحيث $ق(٣ + \frac{٤}{ل + ١})$

$= \frac{٤}{٣ + \frac{٤}{ل + ١} - ٣} = \frac{٤}{\frac{٤}{ل + ١}} = ل + ١ > ل$

∴ ق غير محدود من الاعلى

٤) اصغر قيمة للتطبيق ق تساوى (ـ ٦) واصغر قيمة للتطبيق (٣ ق)
تساوى (ـ ١٨) وبما ان اعظم قيمة للتطبيق (ـ٣ق) = ـ (اصغر قيمة للتطبيق ٣ق)
= ـ (ـ ١٨) = ١٨

٥) (ق ∘ ق ∘ ق) (ـ ٢) = ق(ق (ق (ـ ٢))) = ق(ق (ـ٦)) =
ق ($\frac{ـ٤}{ـ٦ + ٢}$) = ق (١) = ـ ٣

٦) ق غير متناظر مع المحور الثاني لان ∃ (٢ ، صفر) ∈ ق لكن (ـ٢ ، صفر) ∉ ق

٧) ق (س) = ١٠

اما ق (س) = $\frac{٤}{س - ٢}$ او ق (س) = $\frac{ـ٤}{س + ٢}$

∴ $\frac{٤}{س - ٢}$ = ١٠ ، ∴ $\frac{ـ٤}{س + ٢}$ = ١٠

$\frac{س - ٢}{٤}$ = $\frac{١}{١٠}$ ، $\frac{س + ٢}{ـ٤}$ = $\frac{١}{١٠}$

س ـ ٢ = $\frac{٤}{١٠}$ ، س + ٢ = $\frac{ـ٢}{٥}$

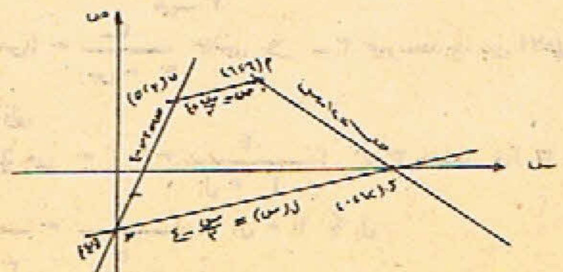
س = $\frac{١٢}{٥}$ ، ∴ س = ـ ٢ $\frac{٢}{٥}$

٨) ((ق ⊕ ق) ⊕ (٣ق)) (ـ ١) = (ق ⊕ ق) (ـ١) ⊕ (٣ق) (ـ١)
= ق(ـ١) + ق(ـ١) + ٣ق(ـ١) = ـ٣ ـ٣ ـ٣(ـ٣) = ـ٦ + ٩ = ٣

مثال ٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { ٢س ـ ٤ ∀ س < ٣ ؛ ١٢ ـ س ∀ س ≥ ٦ ؛ $\frac{س}{٢}$ + ٤ ∀ س ∈ [٣ ، ٦] }

وليكن ل (س) = $\frac{س}{٢}$ ـ ٤ فجد مساحة الشكل المحدد بين بياني التطبيقين ق ، ل



(شكل ٢ـ١٥)

ص = ٢س ــ ٤ ‏ ‏ ‏ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٤ ‏ ‏ ‏ ص = ١٢ ــ س

س	ص
٣	٥
٠	ــ ٤

س	ص
٣	٥
٦	٦

س	ص
٦	٦
١٢	٠

بحل معادلتي حـ د ، حـ ب انيا نحصل على نقطة حـ

ص = $\frac{\text{س}}{٢}$ ــ ٤

ص = ٢ س ــ ٤

∴ $\frac{\text{س}}{٢}$ ــ ٤ = ٢س ــ ٤

∴ س = ٠ وبالتعويض في احدى المعادلتين عن قيمة س = ٠

ينتج ص = ــ٤ ∴ حـ (٠ ، ــ ٤)

وبحل معادلتي أ د ، حـ د انيا نحصل على نقطة د (١٢ ، ٠)

∴ ميل أ ب = $\frac{١}{٢}$ ، وميل حـ د = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ ب // حـ د

لكن ميل أ د ≠ ميل ب حـ ⟺ أ د ∦ ب حـ

∴ الشكل أ ب حـ د <u>شبه منحرف</u>

ف (أ ، ب) = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$ = $\sqrt{(٦-٣)^٢ + (٦-٥)^٢}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة

ف (حـ ، د) = $\sqrt{(١٢-٠)^٢ + (٠+٤)^٢}$ = $\sqrt{١٦٠}$ = ٤ $\sqrt{١٠}$ وحدة

اما عن ارتفاع شبه المنحرف فيمثل بعد اى من النقطتين أ ، ب عن المستقيم حـ د ، ونجده كما يلي :ــ

معادلة حـ د هي ص = $\frac{١}{٢}$ س ــ ٤ اى س ــ ٢ ص ــ ٨ = ٠

∴ ل = $\frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$ = $\frac{|١ \times ٦ - ٢ \times ٦ - ٨|}{\sqrt{١ + ٤}}$ = $\frac{١٤}{\sqrt{٥}}$ وحدة

مساحة شبه المنحرف = ½ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين × ارتفاعه .

= ½ ($\sqrt{١٠}$ + ٤ $\sqrt{١٠}$) × $\frac{١٤}{\sqrt{٥}}$ = ... = ٣٥ $\sqrt{٢}$ وحدة مربعة

مثال ٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق (س) = $\begin{cases} \text{س} |\text{س}| + ٤ & \forall \text{س} \in [-٢ ، ٢] /]-١ ، ١[\\ \text{س}^٢ |\text{س}| + ٨ & \forall \text{س} \in]-١ ، ١[\\ \frac{٢}{\text{س} - ٢} & \forall \text{س} > ٢ \\ \frac{٢}{\text{س} + ٢} & \forall \text{س} < -٢ \\ [\frac{٥\text{س} + ٤}{٣}] & \forall \text{س} \in \{-١ ، ١ ، ٢ ، -٢\} \end{cases}$

ــ٢ ‏ ‏ ‏ ــ١ ‏ ‏ ‏ ١ ‏ ‏ ‏ ٢

١) ق(س) = س٢ + ٤ ∀ س ∈]١ ، ٢[، ق(س) = ـ س٢ + ٤ ∀ س ∈]ـ٢ ، ـ١[

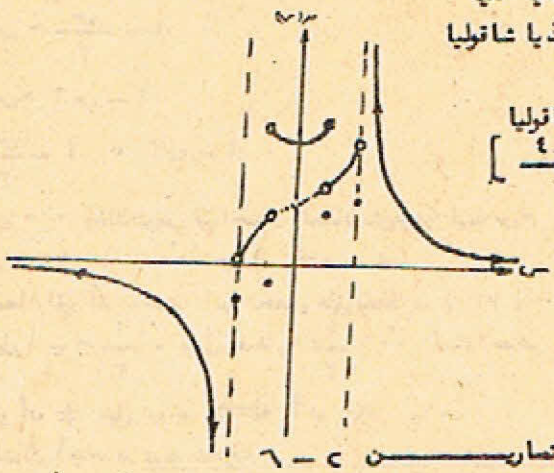


٢) ق(س) = س٣ + ٨ ∀ س ∈ [٠ ، ١[،
ق(س) = ـ س٣ + ٨ ∀ س ∈]ـ١ ، ٠[

٣) ص = ٠ مستقيما محاذيا افقيا
س = ٢ مستقيما محاذيا شاقوليا

٤) ص = ٠ محاذيا افقيا
س = ـ٢ محاذيا شاقوليا

٥) ق(س) = [(٥ س + ٤) / ٣]



س	ق(س)
ـ١	ـ١
١	٣
٢	٤
ـ٢	ـ٢

تماريـــــــن ٢ ـ ٦

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التالية :ـ

(١) ق : [ـ٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- $\frac{1}{2}$ س٢ ـ ٢ عندما س ≠ ١ ، س ≠ ـ١
- ١ عندما س = ١
- ـ ½ عندما س = ـ١

(٢) ق : [ـ٤ ، ٦] ⟵ [ـ١٠ ، ١٠] ⟵ ح بحيث

ه(س) =
- ٤ ∀ س ∈ [٠ ، ٦]
- ـ س ـ ١ ∀ س ∈ [ـ٤ ، ٠[

(٣) ق : ح ⟵ ح بحيث

ه(س) =
- س + ١ ∀ س ≥ ١
- ٣ ١ < س < ٢
- ـ س + ٢ ٤ > س ≥ ٢
- ـ٣ س + ٢٠ ∀ س ≥ ٥
- ص٢ + ٨ ٥ > س ≥ ٤

(٤)

ه(س) =
- س٢ ∀ س ≥ ١
- صفر ـ١ ≤ س < ١
- س + ١ ∀ س < ـ١

(٥) د(س) =
- ٤ − س٢ ∀ س ∈ [−٢ ، ٢]
- |س| ∀ س ∈ [٢ ، ٦] ∪ [−٦ ، −٢]
- ٦ ∀ س ∈ ح / [−٦ ، ٦]

(٦) د(س) =
- −٣ ∀ س < −٢
- س + ٣ ∀ س ∈] −٢ ، ٠ [
- − س٢ − ١ ∀ س ≥ صفر

(٧) د(س) =
- ١/٣ ∀ س ≥ صفر
- ٣ عندما س = صفر

(٨) د(س) =
- |س|/س + ٢ ∀ س ≠ صفر
- − ٢ عندما س = صفر

(٩) ق :] −٦ ، ٨ [⟵ ح بحيث

ق(س) =
- |س| ∀ س ∈ [−٦ ، − ٢]
- ٢س − ١ ∀ س ∈] −٢ ، ٢ [
- ٤ ∀ س ∈ [٢ ، ٨]

(١٠) ق :] −٦ ، ١٠ [⟵ ح بحيث

د(س) =
- − س − ٤ ∀ س ∈] −٦ ، ٠ [
- [س] ∀ س ∈ [٠ ، ٤ [
- ٢س ∀ س ∈ [٤ ، ١٠ [

(١١) ق(س) =
- ٤ ∀ س ∈ [−١ ، ١]
- س٢ ∀ س ∈ ح / [−١ ، ١]

(١٢) د(س) =
- س٣ ∀ س ∈] −٢ ، ٢ [
- ٨ ∀ س ≥ ٢
- − ٨ ∀ س < −٢

(١٣) د(س) =
- س٢ ∀ س ∈ [−٢ ، ٢ [
- [س] ∀ س ≥ ٢
- ٦ ∀ س ∈ [−٤ ، −٢[
- س٢ ∀ س < −٤

(١٤) ق(س) =
- [س] + س٢ س عدد حقيقي غير سالب
- − [س] + س٢ س عدد حقيقي سالب

(١٥) ق(س) =
- س٢ + ١ ∀ س ∈ [−١ ، ١ [
- [س] ∀ س ∈ [−٤ ، −١[
- ٣ ∀ س < −٤
- س ∀ س ≥ ١

(١٦) ق : [−٣ ، ٣ [⟵ ح بحيث

د(س) =
- س٢ + ٢ ∀ س ∈ [−٣ ، ١]
- ١ − س٢ ∀ س ∈]١ ، ٣[

(١٧) ه(س) = { س^{٢} ∀ س ≤ ١
|س| / س ∀ س > ١ }

(١٨) ق(س) = س^{٢} − ٢ |س| + ١

(١٩) ه(س) = { س + ١ اذا كان س < ٣
(س − ١)^{٢} اذا كان س ≥ ٣ }

(٢٠) ق:]−٣، ٧[⟵ ح بحيث
ه(س) = { ١/س + ١ ∀ س < صفر
س^{٢} + ٢ ∀ س ∈ [٠، ٢[
٤ ∀ س ≥ ٢ }

(٢١) ق:]−٤، ٥[⟵ ح بحيث
ه(س) = { س^{٢} − ٢ اذا كان س < ٢
١ / (س − ١) اذا كان س ≥ ٢ }

(٢٢) ق: [−٤، ٧] ⟵ ح بحيث ق(س) = { |س − ٢| اذا كان س < ٤
س [س] اذا كان س ≥ ٤ }

(٢٣) ق(س) = { |س| اذا كان س عددا حقيقيا غير صحيح
صفر اذا كان س عددا صحيحا }

(٢٤) ق(س) = { ٢ ∀ س > صفر
١ عندما س = صفر
−٢ س < صفر }

(٢٥) ق(س) = { ٣س + ١ ∀ س > ٢
٤ ∀ س ∈ [−٣، ٢]
−س + ١ ∀ س < −٣ }

(٢٦) ق: [−٧، ٩] ⟵ ح بحيث ق(س) = { س ∀ س عدد حقيقي غير صحيح
٢ عندما يكون س عددا صحيحا }

(٢٧) ق(س) = { −٣س^{٢} + ١٠ ∀ س ∈ [−٢، ٣]
٢ ∀ س > ٣
−س + ٢ ∀ س < −٢ }

(٢٨) ق(س) = { ٢س^{٢} − ١٠ ∀ س ∈ [−٣، ٣]
٤ ∀ س ∈ ح / [−٣، ٣] }

(٢٩) ق(س) = { |س| / س + ٤ + س^{٢} ∀ س ≠ صفر
−٢ عندما س = صفر }

(٣٠) ق(س) = { ٢ / (س − ٣) ∀ س > ٣
[س] / ٢ ∀ س ∈ [−٤، ٣]
٣ ∀ س < −٤ }.

(٣١) ق(س) = { ٤ − |س − ٤| ∀ س ∌]−١ ، ١]
[س] ∀ س ∈]−١ ، ١] }

(٣٢) هـ(س) = [− س]

(٣٣) هـ(س) = [س + ٠,٥]

لكل من التطبيقات التالية (من ٣٤ ــ ٤٥) اجب عما يلي :ــ

(١) هل يكون ق محدودا من الاعلى ؟ برهن قولك

(٢) هل يكون ق محدودا من الاسفل ؟ برهن قولك

(٣) جد اعظم قيمة واصغر قيمة ان وجدت

(٣٤) ق(س) = ٢س٢ ــ ٣

(٣٥) ق(س) = ــ |٣س٢ ــ ٥|

(٣٦) ق(س) = هـ(س) = { ٢س٢ ــ ٨ ∀ س ∈]−٣ ، ٣[
٤ ∀ س ∈ ح /]−٣ ، ٣[}

(٣٧) ق(س) = ٣ + |٢س٢ ــ ٧|

(٣٨) ق : ح | {٢} ⟵ ح بحيث ق(س) = ١ / (س ــ ٢)

(٣٩) ق :]ــ ٢ ، ٤ [⟵ ح بحيث ق(س) = ٢س ــ ٣

(٤٠) ق : ح | {ــ ١} ⟵ ح بحيث ق(س) = ١ / (س + ١)

(٤١) ق :]٠ ، ٢ [⟵ ح بحيث ق(س) = ١ / (س ــ ٢)

(٤٢) ق : [ــ ٣ ، ٦] ⟵ ح بحيث ق(س) = ٥ ــ ٢س

(٤٣) ق :]ــ ٣ ، ٩ [⟵ ح بحيث ق(س) = ٢٥ ــ ٢س٢

(٤٤) ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = |٢س + ٣| + ٢

(٤٥) ق : ح ⟵ ح بحيث
هـ(س) = { س٢ ــ ١٥ ∀ س ∈]ــ ١ ، ٢]
٤ ∀ س > ٣
ــ ٢ ∀ س ⩽ ــ ١ }

(٤٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { |س + ٢| اذا كان س عدد حقيقي غير صحيح
ــ ٣ اذا كان س عدد صحيح }

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدي

(٢) بالاستعانة بالرسم جد ك ⊂ ح التي يكون عندها ق متزايدا

(٣) بالاستعانة بالرسم جد ع ⊂ ح التي يكون عندها ق متناقصا

(٤) بالاستعانة بالرسم جد ل ⊂ ح التي يكون عندها ق غير متزايد وغير متناقص

*(٤٧) ليكن ق : [−٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- |س| + |س + ٢| + س ، ∀ س ∈ [−٢ ، ٠[
- ٢ ، ∀ س ∈ [٠ ، ٢[
- (٢ − س) / ٢ ، ∀ س ∈ [٢ ، ٣]

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد ∀ س ∈ [−٢ ، ٠[

(٣) برهن ان ق محدود (٤) جد مساحة الشكل المحصور بين منحنى التطبيق والمحور الاول

(٨) ليكن ق : [٠ ، ٢] ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- س ∀ س ∈ [٠ ، ١]
- س − ٢ ∀ س ∈]١ ، ٢[
- صفر عندما س = ٢

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد ∀ س ∈ [٠ ، ١]

(٣) برهن ان ق متناقص ∀ س ∈]١ ، ٢] (٤) برهن ان ق محدود

(٥) جد مساحة الشكل المحدد بين منحنى بيان التطبيق والمحور الاول .

٤٩) ليكن ق :]−١ ، ٣[⟵ ح بحيث ق (س) = س٢ + ١

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق محدود (٣) برهن ان ق متزايد ∀ س ≥ ٠ (٤) برهن ان ق متناقص ∀ س < ٠

(٥) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ ولماذا ؟ (٦) جد الفترة التي يكون فيها ق متناظر مع المحور الثاني .

٥٠) ليكن ق : [−٢ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = |س + ١|

وليكن ع : [−٢ ، ٢] ⟵ ح ، ع (س) = ٢س

جد (١) (ق ⊙ ع) (٢) ، (٢) (ق ⊕ ٢ع) (−١) ، (ق ⊖ ع)(٢)

٥١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق(س) =
- ١ − ٢س اذا كان س ≤ −٢
- س٢ |س| اذا كان س ∈]−١ ، ١[
- − [س] اذا كان س ≥ −١
- صفر اذا كان س ∈ [١ ، ٢[

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) جد (ق ٥ ق) (−١) (٣) جد (ق ⊙ ق ⊖ ق)(٤)

(٤) هل يتناظر ق مع المحور الثاني في الفترة]−١ ، ١[؟ برهن قولك .

٥٢) ليكن د : ح ⟵ ح بحيث

د (س) =
- |٣ / س| اذا كان س ∈ [−٣ ، ٣] / {٠}
- |س٢ − ٤| − ٤ اذا كان س ∈ ح / [−٣ ، ٣]
- ٥ عندما س = صفر

(١) مثل د ديكارتيا (٢) برهن ان د متزايد في الفترة [- ٣ ، ٠]
(٣) برهن ان د محدود من الاسفل .

٥٣) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق (س) =
- س٢ اذا كان س ∌] -٤ ، ٤ [
- س٣ اذا كان س ∈] -٢ ، ٢ [
- ٦ اذا كان س ∈] -٤ ، -٢]
- |س| اذا كان س ∈ [٢ ، ٤ [

(١) مثل ق ديكارتيا
(٢) هل ق محدود ؟ برهن قولك (٣) برهن ان ق متناظر مع نقطة الاصل في] - ٢ ، ٢ [(٤) برهن ان ق متزايد في الفترة] -٢ ، ٢ [
(٥) برهن ان ق متناظر مع المحور الثاني ∀ س ∈ ح /] - ٤ ، ٤ [

٥٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق (س) =
- س٣ ∀ س] - ١ ، ٢]
- ٤ - س٢ ∀ س] ٢ ، ٥]
- س٤ |س| - س٩ ∀ س ∈] ٢ ، ٣]
- - [س] ∀ س > ٥
- ٢ [س] ∀ س ⩽ - ١

(١) جد ق(- ٥ر٢) ، ق(٥ر٦) ، ق(٤) ، ق(½) ، ق (- ½) ، ق(٠)
(٢) مثل ق ديكارتيا (٣) برهن ان ق محدود من الاعلى
(٥) برهن ان ق متناقص في الفترة] ٥ر٣ ، ٥ر٤]

٥٥) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = | ٤ - س٢ |
(١) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك (ك اكبر منطلق) بحيث يكون (ك ، ح ، ق) تطبيقا (٢) جد المجموعة الجزئية من ح والتي يكون فيها ق متزايدا . (٣) جد المجموعة الجزئية من ح والتي يكون فيها ق متناقصا (٤) هل يكون ق محدودا من الأسفل ؟ برهن قولك ؟ (٥) هل يكون ق محدودا من الاعلى ؟ برهن قولك (٦) مثل ق ديكارتيا (٧) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ برهن قولك
(٨) جد اعظم قيمة للتطبيق ⊝ ق . واصغر قيمة للتطبيق ق .

في كل مما يلي (من ٥٦ الى ٦٢) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك (اكبر منطلق) بحيث يكون (ك ، ح ، ق) تطبيقا .

٥٦) ق(س) = ٢س - / √(س٢ - ٤س - ٥)   ج : ح /] - ١ ، ٥ [
٥٧) ق(س) = ٢ |س| / ([س] + ٢)   ج : ح /] -٢ ، - ١]
٥٨) ق (س) = ١ / (س [س])   ج : ح /] ٠ ، ١]
٥٩) ق (س) = √(٢٥ - س٢)   ج : [-٥ ، ٥]
٦٠) ق (س) = √س + ١ / √س

٦١) $ق = \{ (-١ ، ١) ، (-٢ ، ٣) ، (-٣ ، ٥) \}$

٦٢) $ق = \{ (س ، \frac{١}{س + ٢}) : س \in ك \}$

في كل ما يلي (من ٦٣ الى ٧٢) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك (ك اكبر منطلق) واكبر مجموعة جزئية من ح مثل ل (ل اكبر مدى) بحيث يكون الثلاثي (ك ، ل ، ق) تطبيقا ٠

٦٣) $ق(س) = س^٢ + ٤$

٦٤) $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٤}$ ٦٥) $ق(س) = \sqrt{س^٢ - ٩}$

٦٦) $ق(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ ٦٧) $ق(س) = \frac{١}{(س^٢ - ١)(س^٢ + ٩)(س + ٧س^٢)}$

٦٨) $ق(س) = \sqrt{\frac{س + ٤}{س - ٤}}$ ٦٩) $ق(س) = \sqrt{\frac{س}{س + ٤}}$

٧٠) $ق(س) = \frac{\sqrt{س + ٢}}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$

٧١) $ق(س) = \frac{\sqrt[٣]{س + ٢}}{\sqrt{(س - ١)(س + ٣)}}$

٧٢) $ق = \{ (س ، \sqrt{س(س^٢ - ٣)}) : س \in ك \}$

٧٣) جد اكبر مجموعة جزئية من ح مثل ك بحيث تجعل كلا من (ك ، ح ، ق) ، (ك ، ح ، ل) تطبيقا حيث ان $ق(س) = \sqrt{١٦ - س^٢}$ وان $ل(س) = ٢س - \sqrt{١٦ - س^٢}$ ثم جد ان امكن (ق ⊕ ل) (٢) ، (ق ⊖ ل) (٢) ، (ق ⊙ ل) (٠) ، (ق ⨸ ل) ($\sqrt{٣}$)

٧٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & \text{اذا كان } س < -٣ \\ س + ٣ & \forall س \in [-٣ ، ٠] \\ ٣ - س٢ & \forall س \geq \text{صفر} \end{cases}$$

(١) جد قيمة ق($\sqrt{٢}$) ، ق(صفر) ، ق(−٣) ، ق(−١)

(٢) مثل ق ديكارتيا ٠

* ٧٥) جد مساحة المنطقة المحددة بين بيان التطبيق ق : [−٢ ، ٣[⟵ ح بحيث ق (س) = [س] والمحور الاول ٠

الجواب / ٦ وحدات مربعة ٠

٧٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} -٦ & \forall س \in [-٣ ، ١] \\ -س - ٥ & \forall س \geq ١ \\ س - ٣ & \forall س < -٣ \end{cases}$$

وليكن ل : ح ⟵ ح بحيث ل (س) = ــ ١٢

(١) مثل كلا من ق ، ل ديكارتيا

(٢) جد المساحة المحددة بين بياني التطبيقين ق ، ل

الجواب ٦٠ وحدة مربعة

٧٧) ظلل كلا من المجموعات التالية في المستوي الاقليدي

هـ١ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∋ ح × ح ص = ٢ + ٢س ــ ٢س٢ ، ص = صفر }

هـ٢ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∋ ح × ح ، ص ≤ ٢ + ٣س ــ ٢س٢ ، ٢س > ص }

هـ٣ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∋ ح × ح ، ص ≥ ٤ ــ س٢ ، ص ≤ صفر }

هـ٤ = { (س ، ص) : (س ص) ∋ ح × ح ، ص ≥ ــ |س| + ٢ ، ص ≤ ــ٢ }

هـ٥ = { (س ، ص) : (س ص) ∋ ح × ح ، ص ≥ ٤ ــ س٢ ، ص ≤ س }

ثم جد المساحة التي تشغلها هـ٤

٧٨) ليكن ق :] ــ١٠ ، ١ [⟵ ح بحيث ق (س) = ٢س٢ + ١

ل :] ــ١٠ ، ١ [⟵ ح بحيث ل (س) = س٢ + س ــ ٦

جد ان امكن (ق / ل) (ــ ٣) ، (ل / ق) (ــ ٤) ، ((٢ق) ⊕ (٣ل)) / (ل ⊖ ق) (ــ ٦)

٧٩) هل حاصل قسمة تطبيقين عددين محدودين تطبيق محدود ؟ برهن قولك .

٨٠ *) ليكن ق : [ــ٣ ، ٥] ⟵ ح بحيث ق (س) = |س| + ١

ل : [ــ٣ ، ٥] ⟵ ح بحيث ل (س) = [س] ــ ١

(١) جد كلا مما يلي : ق (ــ ½) ، ل (ــ ٠٫١٨٥) ، (ق ⊕ ل) (ــ٢) ،

(ل ⊕ ق) (٣) ، (ل ⊕ ق) (ــ ٠٫٧٥) ، (ق ⊕ ل) (١½)

(٢) مثل كلا من ق ، ل ، ق ⊕ ل ديكارتيا موضحا كيفية التمثيل .

(٣) هل يكون ق متزايد ؟ هل يكون ل متزايد ؟ هل يكون ق ⊕ ل متزايد ؟ برهن قولك في كل حالة .

(٤) هل يكون ق محدودا ؟ هل يكون ل محدودا ؟ هل يكون ق ⊕ ل محدودا ؟ برهن قولك في كل حالة .

(٥) مثل ق ⊙ ل ديكارتيا . وجد اعظم قيمة واصغر قيمة له ان وجدت

(٦) اذا كان ق : [ــ٣ ، ٥] /] ١ ، ٢ [بحيث ق (س) = |س| + ١

وليكن ل : [ــ٣ ، ٥] /] ١ ، ٢ [⟵ ل (س) = [س] ــ ١

فمثل ق (÷) ل ديكارتيا وجد اعظم قيمة له واصغر قيمة ان وجدت

(٧) مثل ق ⊖ ل ديكارتيا

(٨) هل يكون ق ⊙ ل محدودا ؟ وهل يكون ق (÷) ل المعرف في هذا السؤال في الفرع السادس منه محدودا ؟ برهن قولك .

٨١) (١) اذا كان حاصل ضرب تطبيقين عدديين يساوى تطبيقا صفريا فهل من الضروري ان يكون احدهما تطبيقا صفريا ؟ علل اجابتك

(٢) اذا كان حاصل جمع تطبيقين عدديين يساوى تطبيقا صفريا فهل من الضروري ان يكون احدهما تطبيقا صفريا ؟ علل اجابتك

(٣) اذا كان حاصل طرح تطبيقين عدديين يساوى تطبيقا صفريا فهل من الضروري ان يكون احدهما صفريا ؟ علل اجوبتك .

(٤) اذا كان حاصل قسمة تطبيقين عدديين يساوي تطبيقاً صفرياً فهل من الضروري ان يكون احدهما صفريا ؟ علل اجابتك .

٨٢) ليكن ق ∋ تط (ك) ، ل ∋ تط (ك) وان كلا من ق ، ل متناظر مع نقطة الاصل . أتكون العبارات التالية صادقة ام كاذبة ؟ برهن قولك .

(١) ق ⊕ ل متناظر مع نقطة الاصل (٢) ق ⊖ ل متناظر مع نقطة الاصل

(٣) ق ⊙ ل متناظر مع نقطة الاصل (٤) ق (÷) ل متناظر مع نقطة الاصل

بحيث ل (س) ≠ صفر ∀ س ∋ ك

٨٣) ليكن ق : [−٢ ، ٨] ← ح بحيث ق(س) = | س − ١ |

نجد المجموعة الجزئية من المنطلق بحيث

(١) ق(س) > ٢ (٢) ق(س) ≥ ٥ (٣) ١ > ق(س) ≥ ٥

(٤) ٧ > ق(س) > ٨

٨٤) ليكن ق :] ٠ ، ٢ [← ح بحيث ق(س) = $\frac{١}{س}$

نجد المجموعة الجزئية من المنطلق بحيث يكون

(١) ق(س) ≥ ½ (٢) ق(س) < $\frac{٣}{٤}$ (٣) ق(س) > $\frac{٣}{٤}$

ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $(٢)^{س}$

فجد قيمة ق(صفر) ، ق(٢) ، ق(−٢) ، ق(١) ، ق(−١) ، ق(½) ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨٦) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $(٣)^{س}$ فجد قيمة ق(صفر) ، ق(−٢) ، ق(٢) ، ق(½) وارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨٧) ليكن ق١(س) = $(-1)^{\text{س}}$ ، وليكن ق٢(س) = $(-1)^{-\text{س}}$

(١) جد ق١ ⊕÷ ق٢ ، ق١ ⊙ ق٢

(٢) ارسم المخطط الديكارتي للمجموعة {(س ، ص) : ص = $(-1)^{\text{س}}$ أو ص = $(-1)^{-\text{س}}$}

٨٨) ليكن ق(س) = [س + ١] نجد المجموعة الجزئية من المنطلق بحيث ق(س) = ١

٨٩) ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 1 & \forall\ \text{س} > 1 \\ \text{س} & \text{اذا كان س} \in [-1 ، 1] \\ -1 & \forall\ \text{س} < -1 \end{cases}$$

(١) جد قيمة ق(ـ٣) ، ق(ـ½) ، ق(صفر) ، ق(١) ، ق($\sqrt{2}$)

(٢) ارسم ق في المستوى الاقليدي

(٣) جد قيمة $\dfrac{\text{ق(١)} - \text{ق(ـ١)}}{\text{ق(٢)} - \text{ق(ـ٢)}}$

٩٠) ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - 1 & \forall\ \text{س} \geq \text{صفر} \\ 1 - \text{س} & \forall\ \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدي (٢) جد قيمة $\dfrac{\text{ق(٣)} - \text{ق(١)}}{3 - 1}$

(٣) جد قيمة $\dfrac{\text{ق(١)} - \text{ق(ـ١)}}{1 - (-1)}$

٩١) ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 2 + \text{س} & \text{اذا كان س} < -1 \\ |\text{س}| & \text{اذا كان س} \in [-1 ، 1] \\ 2 - \text{س} & \forall\ \text{س} > 1 \end{cases}$$

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدي (٢) جد قيمة $\dfrac{\text{ق(صفر)} - \text{ق(ـ٢)}}{\text{صفر} - (-2)}$

(٣) جد المجموعة الجزئية من ح بحيث ق(س) = ½

(٤) جد المجموعة الجزئية من ح بحيث ق(س) = صفر

٩٢) اذا كان ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$ فبرهن ان ق متناظر مع نقطة الاصل ثم جد قيمة ق(س) عندما س = ـ١٠٠٠ ، ـ٣ ، ـ٢ ، ـ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ١٠٠٠

٩٣) اذا كان ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س² ∀ س ∈ ح ، وكان كل من س ، ص ، ع ∈ ح فبرهن ان ق(س² + ص² + ع²) = (ق∘ق)(س) + (ق∘ق)(ص) + (ق∘ق)(ع) + ٢ق(س)·ق(ع) + ٢ق(ص)·ق(ع)

٩٤) اذا كان ق : ح⁺⁺ ⟵ ح لنجد قيمة المقدار $\frac{\text{ق(س + هـ) — ق(س)}}{\text{هـ}}$ ،

س ، هـ ∈ ح⁺⁺ اذا كان بيان ق كما يلي :—

(١) ق(س) = ٢س — ٣ (٢) ق(س) = س^{2}

(٣) ق(س) = 2س^{2} — ٣س + ٥

(٤) ق(س) = س^{3} (٥) ق(س) = $\frac{1}{\text{س}}$ (٦) ق(س) = $\frac{1}{\text{س}^{2}}$

الاجوبة/ (١) ٢ (٢) ٢س + هـ (٣) ٤س + ٢هـ — ٣

(٤) 3س^{2} + ٣س هـ + هـ^{2} (٥) — $\frac{1}{\text{س(س + هـ)}}$ (٦) — $\frac{\text{٢س + هـ}}{\text{س}^{2}\text{(س + هـ)}^{2}}$

٩٥) ليكن ق : [—٥ ، ٠] ⟵ ح بحيث ق(س) = س^{2} + ٤

وليكن ل : [—٥ ، ٠] ⟵ ح بحيث ل(س) = س^{2} — ١

(١) فاذا كان (ق ⊙ ل) (ص) = ١٦ فما قيمة ص حيث ص ∈ [—٥ ، ٠]

(٢) اذا كان (ق ⊕ ل) (٣ن) = ٧٢ فما قيمة ن حيث ٣ن ∈ [—٥ ، ٠]

(٣) جد عدد ينتمي الى منطلق (ق ⊕ ل) ⊙ ل بحيث صورته بفعل هــــذا التطبيق تساوي ٢٤

(٤) اذا كان (ق ⊙ ع) (س) = صفر فماذا يسمى التطبيق ع ؟

الاجوبة / — ٢ ، — ٢ ، — ٢ ، تطبيق صفري .

٩٦) اذا كان ق : ح⁺⁺ ⟵ ح بحيث ق(س) = (س) س √س

ل : ح⁺⁺ ⟵ ح = ل(س) = $\text{(س }\sqrt{\text{س}}\text{)}^{\text{س}}$

وكان (ق ⊖ ل) (ن) = صفر فما قيمة ن ؟ ، حيث ن ∈ ح⁺⁺

الجواب/ ن = $\frac{9}{4}$

٩٧) اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\text{٨}^{\text{س}}$

ل : ح ⟵ ح = ل(س) = $\text{٨}^{-\text{س}}$

وكان (ق ⊕ ل) (هـ) = $\frac{5}{2}$ فما قيمة هـ ؟ حيث هـ ∈ ح

الجواب/ هـ = — $\frac{1}{3}$ ، او هـ = $\frac{1}{3}$

٩٨) اذا كان ق : ح⁺⁺ ⟵ ح بحيث ق(س) = $\text{س}^{\text{لو ١٠٠}}$ ،

ل : ح⁺⁺ ⟵ ح = ل(س) = لو س^{2}

وكان (ق ⊕ ل) (س) = ٤ فما قيمة س ؟

الجواب/ س = ١٠

٩٩) ليكن ل : ك ⟵ ح تطبيقا متناظرا مع المحور الثاني

وليكن ع : ك ⟵ ح تطبيقا متناظرا مع المحور الثاني

بين صدق او كذب كل من العبارات التالية مبرهنا قولك .

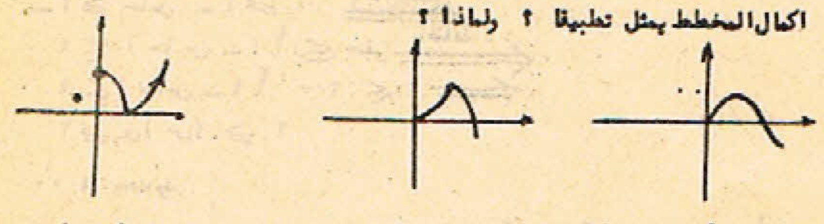
(١) ل $\oplus$ ع متناظر مع المحور الثاني (٢) ل $\odot$ ع متناظرا مع المحور الثاني

(٣) (أ ل) متناظر مع المحور الثاني حيث أ $\in$ ح

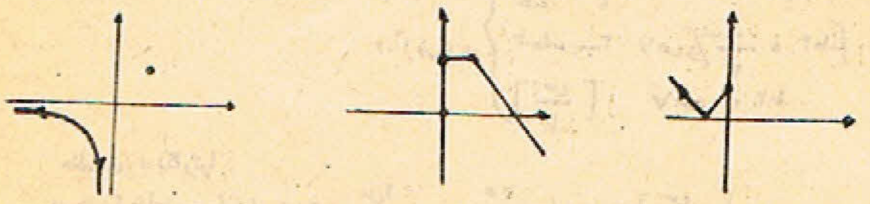
(٤) $\ominus$ ل متناظرا مع المحور الثاني

(٥) ل $\textcircled{\div}$ ع متناظر مع المحور الثاني بحيث ع (س) $\neq$ صفر $\forall$ س $\in$ ك

١٠٠) اكمل كلا من المخططات الديكارتية التالية لتصبح متناظرة مع المحور الثاني مرة ومع نقطة الاصل مرة ثانية ومتناظرة مع المحور الاول مرة اخرى . وهل الشكل الناتج بعد اكمال المخطط يمثل تطبيقا ؟ ولماذا ؟



(أ)　　(ب)　　(جـ)



(د)　　(هـ)　　(و)

١٠١) برهن ان (تط (ك) ، $\oplus$) زمرة ابدالية

١٠٢) هل يكون (تط (ك) ، $\ominus$) تجميعي ؟ ابدالي ؟ يمتلك عنصر محايد ؟ متناظر ؟ برهن اجابتك .

١٠٣) هل يكون (تط (ك) ، $\odot$) تجميعي ؟ ابدالي ، يمتلك عنصر محايد ؟ متناظر ؟ برهن اجابتك

التطبيقات الدائرية .

لقد اعتمدنا في هذا البند على ما درسه الطالب في الصف الخامس العلمي فيستطيع الطالب الرجوع الى كتاب الرياضيات المقرر من قبل وزارة التربية للصف الخامس العلمي .

وذلك سوف نقتصر على اعطاء بعض الامثلة المحلولة ونترك شرح الموضوع لانه موجود في الكتاب المذكور اعلاه بما يفي بالغرض المطلوب .

امثلـــــــة

مثال ١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = حا^{٢}س ـ ٢حاس + ٣

برهن ان ق محدود

الحل) ق(س) = حا^{٢}س ـ ٢حاس + ١ ـ ١ + ٣ باضافة وطرح (١) من الطرف الايسر

= (حاس ـ ١)^{٢} + ٢

ومن دراستك في الصف الخامس العلمي تعلم ان

ـ ١ ≤ حاس ≤ ١ ⟸ (بطرح (١))

ـ ٢ ≤ حاس ـ ١ ≤ ٠ ⟸ (بالتربيع)

٤ ≥ (حاس ـ ١)^{٢} ≥ صفر ⟸ (باضافة ٢)

٦ ≥ (حاس ـ ١)^{٢} + ٢ ≥ ٢ ⟸

٢ ≤ ق(س) ≤ ٦

∴ ق محدود

مثال ٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}}{٢ط} - \frac{٢٥}{٤} & \forall س \leq \frac{-ط}{٢} \\ ٢حاس - ٣ & \forall س \in]\frac{-ط}{٢} ، ٢ط] \\ [\frac{س}{ط}] & \forall س > ٢ط \end{cases}$$

مثل ق ديكارتيا

ص = ٢حاس ـ ٣ ، ص = $\frac{س^{٢}}{٢ط}$ ـ $\frac{٢٥}{٤}$ ، ص = $[\frac{س}{ط}]$

س	ص
$\frac{ط}{٢}$	صفر
$\frac{-ط}{٢}$	ـ ٦
٠	ـ ٣
ط	ـ ٣
$\frac{٣ط}{٢}$	ـ ٦
٢ط	ـ ٣

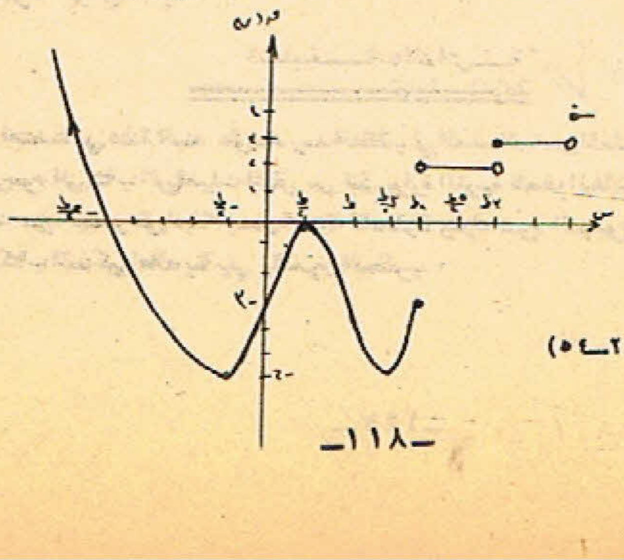
س	ص
$\frac{-ط}{٢}$	ـ ٦
$\frac{-٥ط}{٢}$	صفر

∀س ∈]٢ط ، ٣ط[⟸ ص = ٢

∀س ∈ [٣ط ، ٤ط[⟸ ص = ٣

∀س ∈ [٤ط ، ٥ط[⟸ ص = ٤

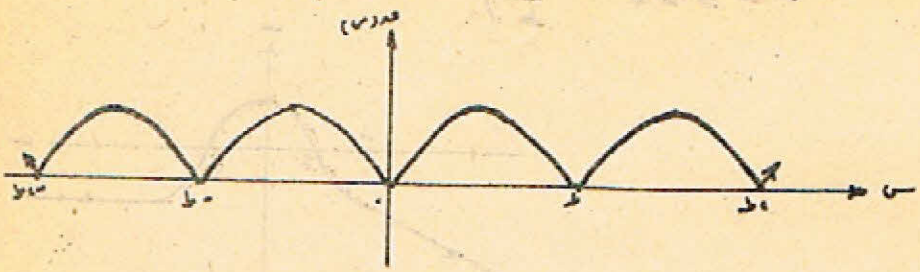
ــــــ



(شكل ٢ـ٤ـ٥)

مثال ٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق (س) = |حاس|

ق(س) = { صفر ∀ س ∈ {ن ط : ن ∈ ص}
        { ١ ∀ س ∈ {(٢ن + ١)/٢ ط : ن ∈ ص}



شكل (٢ــ ٥٥)

مثال ٤) ليكن أ = {ن ط : ن عدد صحيح} ، ب = {(٢ن+١)/٢ ط : ن عدد صحيح}

وليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { [حاس] + ٢ ∀ س ∈ ح / (أ ∪ ب)
        { ٢ اذا كان س ∈ أ
        { ١ اذا كان س ∈ ب

مثل ق ديكارتيا

∀ س ∈]٠ ، ط[/ {ط/٢} ⟸ ٠ < حاس < ١ ⟸ [حاس] + ٢ = ٢

∀ س ∈]ط ، ٢ط[/ {٣ط/٢} ⟸ -١ < حاس < ٠ ⟸ [حاس] + ٢ = ١

∀ س ∈]٢ط ، ٣ط[/ {٥ط/٢} ⟸ ٠ < حاس < ١ ⟸ [حاس] + ٢ = ٢

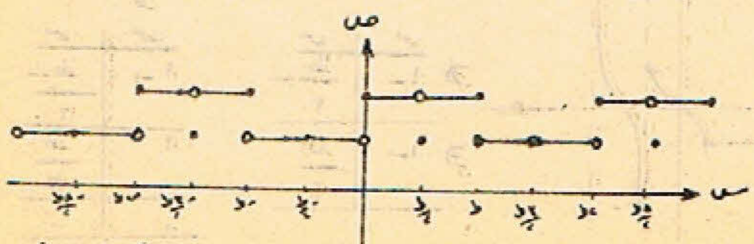
- - - -

∀ س ∈]-ط ، ٠[/ {-ط/٢} ⟸ -١ < حاس < ٠ ⟸

[حاس] + ٢ = ١

∀ س ∈]-٢ط ، -ط[/ {-٣ط/٢} ⟸ ٠ < حاس < ١ ⟸

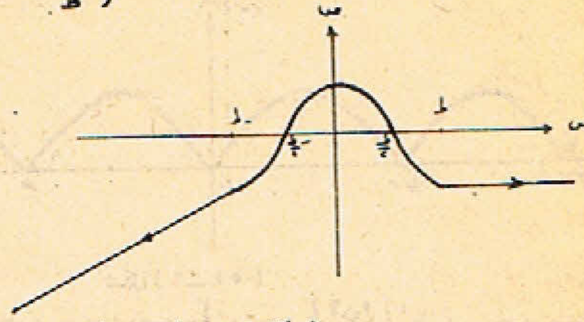
[حاس] + ٢ = ٢



(شكل ٢ــ٥٦)

مثال٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { جتاس ∀س ∈ [−ط ، ط]
−١ ∀س ≥ ط
س/ط ∀س < −ط



(شكل ٢ـ٥٧)

مثال٦) ليكن ق : ح ← ح بحيث ~~ق(س)~~

ق(س) = { طاس ∀س ∈]ط/٢ ، ٣ط/٢[
$\left(\frac{٢س}{ط}\right)^{٢}$ ∀س ∈ [−ط/٢ ، ط/٢]
−١ ∀س ∈ ح/[−ط/٢ ، ٣ط/٢]

مثل ق ديكارتيا

(١) ص = طاس

كل من س = ط/٢ ، س = ٣ط/٢ محاذيا شاقوليا

طا ط = صفر ،

∀س ∈]ط/٢ ، ط[فان طاس < صفر

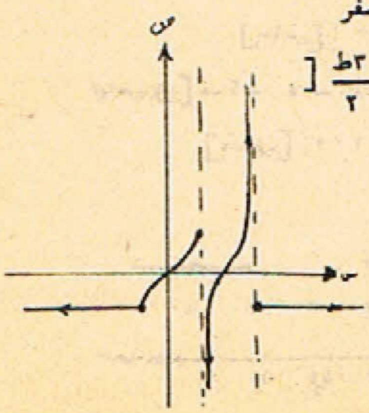
∀س ∈]ط ، ٣ط/٢[فان طاس > صفر

طاس متزايد ∀ س ∈]ط/٢ ، ٣ط/٢[

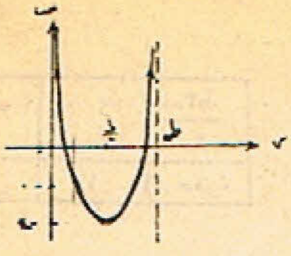
(٢) ص = $\left(\frac{٢س}{ط}\right)^{٢}$ (٣) ص = −١

س	ص
−ط/٢	−١
ط/٢	١
٠	٠

س	ص	
−ط/٢	−١	∌
٣ط/٢	−١	∌



(شكل ٢ـ ٥٨)



(شكل ٢ ــ ٥٩)

مثال ٧) ليكن ق :] صفر ، ط [⟵ ح

بحيث ق(س) = | ظتا س | ــ ٤

كل من س = صفر ، س = ط هو محاذ شاقولي

عندما س = ط/٢ فان ق(س) = ٤

مثال ٨) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =

$$\begin{cases} \text{تاس} & \forall \text{س} \in]-\frac{\text{ط}}{2} ، \frac{\text{ط}}{2}[\\ \frac{|\text{٢س}|}{\text{ط}} & \forall \text{س} \in \text{ح} / \text{E}]-\frac{\text{ط}}{2} ، \frac{\text{ط}}{2}[\end{cases}$$

مثل ق ديكارتيا . ثم برهن انه محدود من الاسفل

ص = تاس

كل من س = ــ ط/٢ ، س = ط/٢ محاذ شاقولي

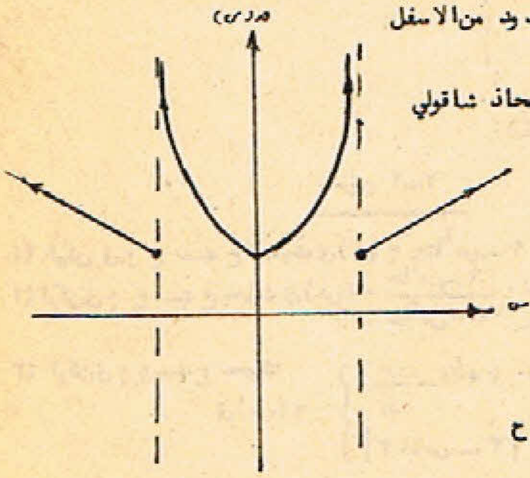
ق(٠) = ١

ص = | ٢س / ط |

س	± ط/٢	± ط
ص	± ١	٢

وبما ان ق(س) ⩾ ١ ∀ س ∈ ح

∴ ق محدود من الاسفل



(شكل ٢ ــ ٦٠)

مثال ٩) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{قتاس} & \forall \text{س} \in]-\text{ط} ، \text{ط}[/ \{\text{صفر}\} \\ [\frac{\text{س}}{\text{٢ط}}] & \forall \text{س} \geqslant \text{ط} \\ |\text{جتاس}| & \forall \text{س} \leqslant -\text{ط} \\ \text{صفر} & \text{عندما س = صفر} \end{cases}$$

ص = قتاس

(٢) كل من س = ــ ط ، س = ط محاذ شاقولي

قتا (ــ ط/٢) = ــ ١ ، قتا (ط/٢) = ١

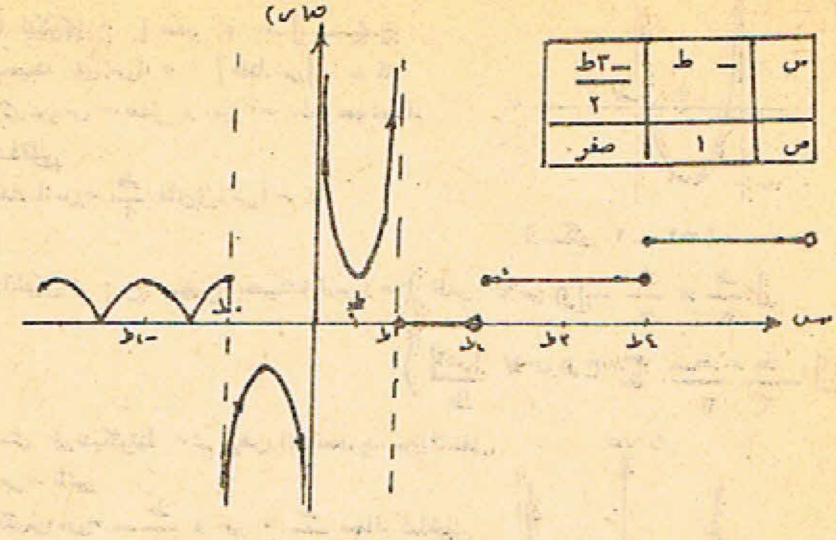
(٢) ∀ س ∈ [ط ، ٢ط[⟸ ق(س) = صفر

∀ س ∈ [٢ط ، ٤ط[⟸ ق(س) = ١

∀ س ∈ [٤ط ، ٦ط[⟸ ق(س) = ٢

(٣)

س	ـ ط	$\frac{-٣ط}{٢}$
ص	١	صفر



(شكل ٢ــ٦١)

تمارين ٢ــ٧

١) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = جتا^{٢}س ــ ٢ جتاس−١ برهن ان ق محدود

٢) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $\frac{\text{حا}^٢\text{س} - ١}{\text{حا}^٢\text{س} + ١}$ ، برهن ان ق محدود

٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { $(\frac{س}{ط} - ٢)^٢ + ٢$ ∀ س ∈ [٠ ، ٤ط]

{ |٢ حاس ــ ٢| ∀ س ∈ ح / [٠ ، ٤ط]

مثل ق ديكارتيا

٤) لتكن أ = {ن ط : ن عدد صحيح} ، ب = { $(\frac{٢ن+١}{٢})$ط : ن عدد صحيح }

وليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { [جتاس] ــ ٢ ∀ س ∈ ح / (أ ∪ ب)

{ ــ ٢ اذا كان س ∈ أ

{ ــ ٣ اذا كان س ∈ ب

مثل ق ديكارتيا ، وبرهن ان ق محدود وجد اعظم قيمة واوطأ قيمة له

٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث

ق(س) = { جتاس ∀ س ∈ [٠ ، ٢ط]

{ حاس ∀ س ∈ [ــ٢ط ، ٠]

{ |$\frac{س}{ط}$ ــ ٢| ∀ س ∈ ح / [ــ٢ط ، ٢ط]

(٢) مثل ق د يكارتيا (٢) برهن ان ق محدود من الاسفل وغير محدود من الاعلى

(٣٠) جد قيمة كل من (ق ⊙ ق) (ط/٦) ، (ق ⊕ ق) (٥ط/٢) ،
(ق ∘ ق) (ــ ٢ ط) ، ق(ــ ١٥) ، ق (١٥)

٦) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث
د(س) =
| طاس | ∀ س ∈] ط/٢ ، ٣ط/٢ [
(٢س/ط)٢ ∀ س ∈ [ــ ط/٢ ، ط/٢]
ــ(٢س/ط)٢ ــ ٣ ∀ س ∈ ح /] ــ ط/٢ ، ٣ط/٢ [

مثل ق د يكارتيا

٧) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =
طتاس ∀ س ∈] ط ، ٢ط [
س/ط ــ ٢ ∀ س ⩽ ط
٢ ــ س/ط ∀ س ⩾ ٢ط

(١) مثل ق د يكارتيا (٢) برهن ان ق متزايد ∀ س ⩽ ط
(٣) برهن ان ق متناقص ∀ س ⩾ ٢ط

٨) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =
حا (س + ط/٢) ∀ س ⩾ صفر
جتا (س + ط/٢) ∀ س > صفر

(١) مثل ق د يكارتيا (٢) جد ق(صفر) ، ق (ط) ، ق (ــ ٢ط) ،

٩) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = حا ٢س جتاس ــ حاس جتا ٢س
(١) مثل ق د يكارتيا (٢) برهن ان ق محدود
(تلميح / استخدم قانون جيب الفرق بين زاويتين في تمرين ٩ وقانوني جيب المجموع وجيب تمام المجموع لزاويتين في تمرين ٨) .

١٠) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =
جتا (ط/٢ ــ س) ∀ س ∈ [ــ ط ، ط]
حا (ط/٢ ــ س) ∀ س ∈ ح / [ــ ط ، ط]

(١) مثل ق د يكارتيا ثم برهن انه محدود

١١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث
ق (س) =
حا (ــ س) ∀ س < صفر
جتا (ــ س) ∀ س ∈ [٠ ، ٢ط]
[ط ــ س] ∀ س > ٢ط

مثل ق د يكارتيا

١٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =
٢حاس جتاس ∀ س ∈ [ــ ٢ط ، ط]
حا٢س + جتا٢س + ٢ ∀ س ∈ ح / [ــ ٢ط ، ط]

(١) مثل ق د يكارتيا ثم بين انه محدود

١٢) ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{٢جتا}^{٢}\text{س} - ١ & \forall \text{س} \geqslant \text{صفر} \\ \dfrac{١ - \text{جتاس}}{٢} & \forall \text{س} \in]-\text{ط} \text{ ، } \text{صفر}[\\ \dfrac{١ + \text{جتاس}}{٢} & \forall \text{س} < -\text{ط} \end{cases}$$

مثل قدبكارتيا

الفصل الثالث

غايـة المتتابعـــات

تعريف /

المتتابعة / تطبيق منطلقة المجموعة $ط^+$ = {١ ، ٢ ، ٣ ــــــ} اوالمجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ــــــ ، ن} حيث ن عدد طبيعي منته ، ومستقره مجموعة غير خاليـة ·

مثال ١) ق(ن) = ن + ٣ ∀ن ∈ $ط^+$

نلاحظ ان ق (١) = ٤ ، ق (٢) = ٥ ، ق(٣) = ٦ ، ق(٤) = ٧ ···

تسمى ق(١) ، ق(٢) ، ق(٣) ، ق(٤) ······ متتابعة

ولكون كل المتتابعة منطلقها $ط^+$ او المجموعة {١ ، ٢ ، ····· ، ن} فسوف نهمل مجموعة المساقط الاولى ونقتصر على كتابة مجموعة المساقط الثانية اى ق(١) ، ق (٢) ، ·····

ولتمييزها عن المجموعات الاخرى سنضع حدود المتتابعات بين قوسين من النوع

⟨ ⟩

ففي المثال اعلاه تكتب هذه المتتابعة بالصورة

⟨ق(١) ، ق(٢) ، ق(٣) ، ق(٤) ·····⟩ او ⟨٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ····⟩

او ⟨ن + ٣⟩ حيث ن + ٣ يسمى الحد العام للمتتابعة

وتسمى الاعداد ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، بالحدود الاربع الاولى لهذه المتتابعة

مثال ٢) اكتب الحدود الاربع الاولى من المتتابعة ⟨$\frac{٣}{٢ن - ١}$⟩ ، ثم جد حدهـــا الخامس والعشرين

الحل) ق(١) = $\frac{٣}{١}$ ، ق(٢) = $\frac{٣}{٣}$ ، ق(٣) = $\frac{٣}{٥}$ ، ق(٤) = $\frac{٣}{٧}$

اي ان الحدود الاربع الاولى للمتتابعة التي حدها العام $\frac{٣}{٢ن - ١}$ هي

على الترتيب ٣ ، ١ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٧}$

$$ق(٢٥) = \frac{٣}{٢ \times ٢٥ - ١} = \frac{٣}{٤٩}$$

مثال ٣) اذا كانت الحدود الاربع الاولى لمتتابعة هي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، فاكتـب الحد العام لها .

الحل/ بالتجربة والخطأ نستطيع ايجاد الحد العام وهو ق(ن) = ٢ن ·

مثال ٤) اذا كانت الحدود الخمسة الاولى لمتتابعة هي ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ··· فاكتب الحد العام لها .

الحل/ ق١ = ١

$ق_2 = ٢ = ٢^{١}$

$ق_3 = ٤ = ٢^{٢}$

$ق_4 = ٨ = ٢^{٣}$

$ق_5 = ١٦ = ٢^{٤}$

$$ق_ن = ٢^{ن-١} \quad \forall ن \in ط^{+}$$

مثال ٥) جد الحد العام للمتتابعة التي حدودها الاربعة الاولى كما يلي :-

(١) $٢ ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٥}{٤}$. (٢) $س ، \frac{-س^{٢}}{٢} ، \frac{س^{٣}}{٣} ، \frac{-س^{٤}}{٤}$

الجواب/ (١) $ق_ن = \frac{ن + ١}{ن}$ (٢) $\frac{(-١)^{ن+١} . س^{ن}}{ن}$

مثال ٦) اكتب الحدود الاربعة الاولى للمتتابعة التي حدها العام كما يلي :-

(١) $ق_ن = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ (٢) $ق_ن = (-١)^{ن} ٢^{ن}$

الحل/ (١) ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ (٢) −٢ ، ٤ ، −٨ ، ١٦

تعريف: تسمى المتتابعة منتهية اذا كان منطلقها $\{١ ، ٢ ، .... ، ن\}$

حيث ن عدد طبيعي منته اي منطلقها مجموعة منتهية

وتسمى المتتابعة غير منتهية اذا كان منطلقها $ط^{+} = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ...\}$

اي مجموعة غير منتهيــة

ملاحظة / اذا كانت المتتابعة منتهية فلا يمكن ان نحصل على حد عام وحيد .

فمثلا المتتابعة ⟨٣ ، ٦ ، ٩⟩ يمكن ان يكتب حدها العام بالصورة

$ق_ن = ٣ن \quad \forall ن \in \{١ ، ٢ ، ٣\}$ اويمكن ان يكتب

$$ق_ن = ٣ن + (ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣) ، \forall ن \in \{١ ، ٢ ، ٣\}$$

تماريــــــن

١) اكتب الحدود الاربعة الاولى لكل من المتتابعات التالية التي حدها العام كما يلي :-

(١) $ق_ن = ن - ٥$ ، (٢) $ق_ن = ٢ن - ٣$ (٣) $ق_ن = \frac{ن^{٢} - ٢}{٢}$

(٤) $ق_ن = \frac{٣}{ن^{٢} + ١}$ (٥) $ق_ن = ١ + \frac{١}{ن}$ ، (٦) $ق_ن = \frac{ن}{٢ن - ١٠}$ ،

(٧) $ق_ن = \frac{ن(ن - ١)}{٢}$ ، (٨) $ق_ن = \frac{٥}{ن(ن + ١)}$

(٩) $ق_ن = (-١)^{ن}$ ، (١٠) $ق_ن = (-١)^{ن+١}$ ، (١١) $ق_ن = \frac{(-١)^{ن}(ن-٢)}{ن}$

(١٢) $ق_ن = (-١)^{ن-١}\ ٣^{ن+١}$

٢) جد الحد العام لكل من المتابعات التالية التي حدودها الاربعة الاولى كما يلي :-

(١) ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ... (٢) ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ----

(٣) ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ... (٤) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ----

(٥) −١ ، ١ ، −١ ، ١ ، ... (٦) ١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ----

(٧) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... (٨) ٣ ، −٧ ، ١١ ، −١١ ، ----

(٩) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، ... (١٠) $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، ----

(١١) ٢ ، ٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ---- (١٢) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ----

(١٣) $س^٦$ ، $س^٣$ ، $س^٤$ ، $س^٩$ ، ... (١٤) ١ ، −س ، $س^٢$ ، $-س^٣$ ----

ملاحظات/ (١) يقال للمتابعة $ق_ن$ انها متابعة متقاربة اذا كان لها غاية

ومعنى غا $\langle ق_ن \rangle = ب$ حيث $ب \in ح$ هو

انه $\forall هـ \in ح^{++}$ ، $\exists ن_١ \in ط$ بحيث اذا كان $ن > ن_١$ فان $|ق_ن - ب| < هـ$

(٢) يقال للمتابعة $ق_ن$ انها غير متقاربة اذا لم تكن لها غاية

(٣) كل متابعة مداها غير محدود فانها ليست متقاربة اما اذا كان مداها محدودا فانه ليس شرطا ان تكون متقاربة

(٤) غاية المتابعة وحيدة

(٥) غاية المتابعة الثابتة هو الحد الثابت نفسه

(٦) غا $\langle \frac{١}{ن} \rangle =$ صفر وبصورة عامة غاية المتابعة التي درجة بسطها اقل من درجة مقامها تساوي صفرا .

امثلة / $\langle \frac{ن}{ن^٢ + ١} \rangle$ ، $\langle \frac{ن^٢ + ٣ن + ٥}{ن^٣ + ن - ٣ن^٢ + ٢ن + ٧} \rangle$

(٧) غاية المتابعة التي درجة بسطها كدرجة مقامها تساوي حاصل قسمة معامل الحد ذي الاعلى درجة بالبسط على معامل الحد ذي الاعلى درجة بالمقام .

امثلة / غا $\langle \frac{ن}{٢ن + ١} \rangle = \frac{١}{٢}$ ، غا $\langle \frac{٤ن^٢ - ٣ن + ٤}{٥ن + ٢ن^٢ + ٤} \rangle = ٢$

غا $\langle \frac{ن^٣ - ٣ن^٢ + ٧ن + ١٥}{ن^٥ - ٧ن^٣ + ٣} \rangle = \frac{-١}{٧}$

(٨) المتابعة التي درجة بسطها اكبر من درجة مقامها غير متقاربة .

امثلة $\langle ن \rangle$ ، $\langle \frac{ن^٢}{٢ن + ٣} \rangle$ ، $\langle \frac{ن^٤ + ٣ن^٢ - ٢ن + ٧}{ن - ٢ن^٢ + ٥} \rangle$

(٩) المتابعة المتذبذبة (Harmonic Sequence) غير متقاربة

امثلة $\langle (-١)^ن \rangle$ ، $\langle ٢ + (-١)^ن \rangle$

(١٠) غاية المجموع الجبرى لمتتابعتين متقاربتين = المجموع الجبرى لغايتيهما

(١١) غاية حاصل ضرب متتابعتين متقاربتين = حاصل ضرب غايتيهما

(١٢) غاية حاصل ضرب ثابت في متتابعة متقاربة = الثابت × غاية المتتابعة

(١٣) غاية حاصل قسمة متتابعة متقاربة على اخرى متقاربة (بحيث الاخرى غايتها ≠ صفر) تساوي حاصل قسمة غايتيها

امثلة

(١) برهن باستخدام التعريف مايلي

(١) غا $\langle -٣ \rangle = -٣$ (٢) غا $\left\langle \frac{٢}{ن^٢} \right\rangle$ = صفر

(٣) غا $\left\langle \frac{٣ن - ٥}{٨ + ن} \right\rangle = ٣$. ٣   (٤) غا $\left\langle \frac{-٣ن + (-١)^ن}{ن} \right\rangle = -٣$

(١) غا $\langle -٣ \rangle = -٣$

البرهان/ ليكن هـ $\in$ ح$^{++}$ فان $|ق_ن - (-٣)| = |-٣+٣|$ = صفر

$\therefore |ق_ن - (-٣)| <$ هـ مهما كان $ن_١ \in$ ط

$\therefore$ غا $\langle -٣ \rangle = -٣$

(٢) غا $\left\langle \frac{٢}{ن^٢} \right\rangle$ = صفر

البرهان : $\forall$ هـ $\in$ ح$^{++}$ ، $\exists\, ن_١ > \frac{٢}{٢هـ}$ (خواص الاعداد الطبيعية)

بحيث اذا كان $ن > ن_١$ فان $|ق_ن -$ صفر$| = |\frac{٢}{ن^٢} -$ صفر$| = |\frac{٢}{ن^٢}| =$

$\frac{٢}{ن^٢} < \frac{٢}{ن_١^٢} < \frac{٢}{٢ \times \frac{٢}{٢هـ}} =$ هـ

$\therefore$ غا $\left\langle \frac{٢}{ن^٢} \right\rangle$ = صفر

(٣) غا $\left\langle \frac{٣ن + ٥}{٨ + ن} \right\rangle = ٣$

البرهان/ $\forall$ هـ $\in$ ح$^{++}$ ، $\exists\, ن_١ > \frac{١٩}{هـ} - ٨$ (خواص الاعداد الطبيعية)

بحيث اذا كان $ن > ن_١$ فان

$$|ق_ن - ٣| = \left|\frac{٣ن + ٥}{ن + ٨} - ٣\right| = \left|\frac{٣ن + ٥ - ٢٤ - ٣ن}{ن + ٨}\right| = \left|\frac{-١٩}{ن + ٨}\right|$$

$$= \frac{١٩}{ن + ٨} < \frac{١٩}{ن_١ + ٨} < \frac{١٩}{٨ + \frac{١٩}{هـ} - ٨} = هـ$$

∴ غا ⟨ (٣ن + ٥) / (ن + ٨) ⟩ = ٣

(٤) غا ⟨ (−٣ن + (−١)^ن) / ن ⟩ = −٣

البرهان/ ⟨ (−٣ن + (−١)^ن) / ن ⟩ = ⟨ −٣ + (−١)^ن / ن ⟩

∀ هـ ∈ ح^{++} ، ∃ ن١ > ١/هـ بحيث اذا كان ن > ن١ فان

|ق ن + ٣| = | −٣ + (−١)^ن / ن + ٣ | = | (−١)^ن / ن | = ١/ن < ١/ن١ < هـ

وبهذا يتم البرهـــان

مثال ٢) لتكن ⟨ق ن⟩ = ⟨ (٣ن − ٥) / (٩ن + ٤) ⟩ ، جد العدد الطبيعي ن١ بحيث اذا كان

ن > ن١ فان |ق ن − ١/٣| < ٠٫٠٠١

اى اوجد عدد النقاط التي خارج الفترة ل =] ١/٣ − ١/١٠٠٠ ، ١/٣ + ١/١٠٠٠ [

والتي تنتمي الى المتتابعة اعلاه .

الحل/

|ق ن − ١/٣| = | (٣ن − ٥) / (٩ن + ٤) − ١/٣ | = | −١٩ / ٣(٩ن + ٤) | = | ١٩ / ٣(٩ن + ٤) |

= ١٩ / ٣(٩ن + ٤)

بما ان |ق ن − ١/٣| < ١/١٠٠٠

∴ ١٩ / ٣(٩ن + ٤) < ١/١٠٠٠

١٩٠٠٠ < ٢٧ن + ١٢

١٨٩٧٣ / ٢٧ < ن

∴ ن١ = [١٨٩٨٨ / ٢٧] = [٧٠٣ ٧/٢٧] = ٧٠٣ نقطة

∴ ٧٠٣ حدود ∉ ل

مثال ٣) اذا كان ⟨ق ن⟩ = ⟨ (٣ن² + ١) / (٥ن² − ١) ⟩ نبرهن ان

غا ⟨ق ن⟩ = ٣/٥ باستخدام التعريف

ثم جد ن١ ∈ ط بحيث اذا كان ن > ن١ فان |ق ن − ٣/٥| < ٠٫١

البرهان/

لنجد |ق ن − ٣/٥|

$$\left| ق_{ن} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{3ن^2 + 1}{5ن^2 - 1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{8}{5(5ن^2 - 1)}$$

∀ ه ∈ ح++ سوف نختار $ن_1 < ن$ وتحقق المتراجحة

$$\frac{8}{5(5ن^2 - 1)} < ه$$

ومن حل هذه المتراجحة نجد ان $ن^2 > \frac{8}{25ه} + \frac{1}{5}$

$$\therefore\ ن > \frac{1}{5} \sqrt{\frac{8 + 5ه}{ه}}$$

وبهذا نكون قد اوجدنا $ن_1 < ن$ والتي تحقق

$\left| ق_{ن} - \frac{3}{5} \right| < ه$ وبهذا يتم البرهان

اما اذا كانت ه = ٠٫١ فان $ن_1 = \left[\frac{1}{5} \sqrt{\frac{8 + 5ه}{ه}} \right]$

$$= \left[\frac{1}{5} \sqrt{805} \right] = 5$$

∴ جميع حدود المتتابعة والتي تبدأ بالحد السادس ستكون $\in \left] \frac{3}{5} - ٠٫١ ، \frac{3}{5} + ٠٫١ \right[$

مثال ٤) برهن انه ليس للمتتابعات التالية غاية :-

(١) $\langle 4ن - 3 \rangle$ (٢) $\langle 2 + (-3)^{ن} \rangle$ (٣) $\langle 3 + (-1)^{ن} \rangle$

(٤) $\left\langle \frac{(-2)^{ن}}{ن} - 1 \right\rangle$

(٥) $ق_{ن} = \begin{cases} ن + 1 & \text{اذا كانت ن عددا طبيعيا زوجيا موجبا} \\ ن - 1 & \text{اذا كانت ن عددا طبيعيا فرديا موجبا} \end{cases}$

(٦) $ق_1 = 1$ ، $ق_{ك+1} = (ك + 1) \cdot ق_{ك}$

(١) البرهان/ $ق_1 = 1$ ، $ق_2 = 5$ ، $ق_3 = 9$ ، $ق_4 = 13$ ، ---------

$$\therefore \left| ق_2 - ق_1 \right| = |5 - 1| = 4$$

$$\left| ق_4 - ق_3 \right| = |13 - 9| = 4$$

$$\left| ق_{ن+1} - ق_{ن} \right| = 4$$

نفرض ان للمتوالية غاية ولتكن ب

∴ ∀ ه ∈ ح++ ، ∃ $ن_1$ ∈ ط+ بحيث اذا كان $ن > ن_1$ فان

نرجو من القارئ اجراء التغييرات التالية قبل البدء بدراسة مفردات الكتـــــاب :

---

١) في السطر الثالث عشر من المثال ١٢ من الصحيفة ١٤٦ يصبح ق (س) = ٢س + ٢ مستمر ∀ س ≥ ١ بدلا مـــن ق (س) = ٢س + ٢ ∀ س > ١

٢) في السطر ١٧ من المثال ١٠ من الصحيفة ١٥٦ يصبح $\sqrt{\text{س} + ٢}$ وتوضع علامة الجذر لما يتبع هذه الخطوة مـــن نفس المثال في مكانها المناسب

٣) في السطر ٢ من المثال ٦ من اصحيفة ٢٢٨ يصبـــــح ق(س) = ا $\text{س}^{٣}$ + ب $\text{س}^{٢}$ + حـ س + د والسطر الرابع من نفس المثال يصبح : جد قيم ا ، ب ، حـ ، د وناقش المنحني ل (س) = ق (س) — ٧ ومثله بيانيا .

٤) في السطر السابع من الصحيفة ٢٢٩ : د = — ٤ بدلا من د = — ١١ وفي السطر ٨ من نفس الصحيفة ل (س) = ق (س) — ٧ = — $\text{س}^{٣}$ + ٣ $\text{س}^{٢}$ + ٩ س — ١١ ويستبدل الحرف ق بالحرف ل بعد السطر التاسع في نفس المثال

٥) في السطر ٥ من المثال ٧ من الصحيفة ٢٥٨ تصبـــح $\frac{\text{س}^{٤}}{١٦}$ = ٤ س بدلا من $\frac{\text{س}^{٤}}{١٦}$ = ٦٤س .

٦) في مثال ٩ من الصحيفة ٢١٨ تصبح نصف قطرها بدلا مـــن نصف قطر قاعدتها .

٧) في التمرين ١٢ من ص ١٢٦ تصبح ميل المماس لمنحن يساوى ٦س — ٣ $\text{س}^{٢}$ بدلا من ٦س — ٤ س

٨) يحذف السطران الخامس والسادس من س ٦٢ ص ٣٦ .

٩) في برهان مثال ٤

ق (س) = { ١ + ٤س ∀ س > ١ ؛ — ١ + ٤س ∀ س < ١ ؛ ١ عندما س = ١

$|\text{ق}_{\text{ن}} - \text{ب}| < \text{هـ}$

$|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| = |(\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}) + (\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}})| \leqslant |\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}| + |\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}}|$

$< \text{هـ} + \text{هـ} = ٢\text{هـ}$

لتكن هـ = ٠٫١

∴ $|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| < ٠٫٢$ وهذا تناقض

لانه $|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| = ٤$

∴ ليس للمتتابعة غاية .

(٢) $\langle ٢ + (-٣)^{\text{ن}} \rangle$

البرهان/

ق$_١$ = −١ ، ق$_٢$ = ١١ ، ق$_٣$ = −٢٥ ، ق$_٤$ = ٨٣ ، ———————

$|\text{ق}_٢ - \text{ق}_١| = |١١ + ١| = ١٢$

$|\text{ق}_٤ - \text{ق}_٣| = |٨٣ + ٢٥| = ١٠٨$

—————

$|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| \geqslant ١٢$

نفرض ان للمتتابعة غاية ولتكن ب .

∴ $\forall$ هـ $\in$ ح$^{++}$ ، $\exists$ ن$_١$ $\in$ ط بحيث اذا كان ن > ن$_١$ فان

$|\text{ق}_{\text{ن}} - \text{ب}| < \text{هـ}$

$|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| = |(\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}) + (\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}})| \leqslant |\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}| + |\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}}|$

$< \text{هـ} + \text{هـ} = ٢\text{هـ}$

ليكن = ٠٫٥

∴ $|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| < ١$ وهذا تناقض لان

$|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| \geqslant ١٢$

∴ العبارة (للمتتابعة غاية تساوي ب) كاذبة

∴ العبارة (ليس للمتتابعة غاية) صادقة

(٣) $\langle ٣ + (-١)^{\text{ن}} \rangle$

البرهان/

ق$_١$ = ٢ ، ق$_٢$ = ٤ ، ق$_٣$ = ٢ ، ق$_٤$ = ٤ ، ق$_٥$ = ٢ ، ق$_٦$ = ٤ ، ......

$|ق_{٢} - ق_{١}| = |٤ - ٢| = ٢$

$|ق_{٤} - ق_{٣}| = |٤ - ٢| = ٢$

- - - -

$|ق_{ن+١} - ق_{ن}| = ٢$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب

∴ $\forall$ هـ $\in$ ح++ $\exists$ $ن_{١} \in$ ط بحيث اذا كان $ن > ن_{١}$ فان

$|ق_{ن} - ب| < هـ$

$|ق_{ن+١} - ق_{ن}| = |(ق_{ن+١} - ب) + (ب - ق_{ن})| \leqslant |ق_{ن+١} - ب|$

$+ |ب - ق_{ن}|$

$< هـ + هـ = ٢هـ$

ليكن هـ = ١

∴ $|ق_{ن+١} - ق_{ن}| < ٢$ وهذا تناقض لان $|ق_{ن+١} - ق_{ن}| = ٢$

∴ العبارة "المتتابعة متقاربة وغايتها = ب" كاذبة

∴ العبارة "ليس للمتتابعة غاية" صادقة .

(٤) $\left\langle \frac{(-٢)^{ن}}{ن} - ١ \right\rangle$

البرهان/

$ق_{١} = -٣$ ، $ق_{٢} = ١$ ، $ق_{٣} = \frac{-١١}{٣}$ ، $ق_{٤} = ١٣$ ------

$|ق_{٢} - ق_{١}| = |١ + ٣| = ٤$

$|ق_{٤} - ق_{٣}| = |٣ + \frac{١١}{٣}| = \frac{٢٠}{٣}$

- - - - - - - - -

∴ $|ق_{ن+١} - ق_{ن}| \geqslant ٤$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب

∴ $\forall$ هـ $\in$ ح++ ، $\exists$ ن $\in$ ط+ بحيث اذا كان $ن > ن_{١}$ فان

$|ق_{ن} - ب| < هـ$

$|ق_{ن+١} - ق_{ن}| = |(ق_{ن+١} - ب) + (ب - ق_{ن})| \leqslant |ق_{ن+١} - ب| + |ب - ق_{ن}|$

$< هـ + هـ = ٢هـ$

ليكن $هـ = \frac{1}{2}$

$\therefore \; |ق_{ن+١} - ق_ن| < ١$ وهذا تناقض لان

$|ق_{ن+١} - ق_ن| \geq ٤$

$\therefore$ العبارة "$\langle ق_ن \rangle$ لها غاية = ب" عبارة كاذبة

$\therefore$ العبارة ~ "$\langle ق_ن \rangle$ ليس لها غاية" صادقة

(٥) $\langle ن - (-١)^{ن+١} \rangle$

$ق_١ =$ صفر ، $ق_٢ = ٣$ ، $ق_٣ = ٢$ ، $ق_٤ = ٥$ ، $ق_٥ = ٤$ ، $ق_٦ = ٧$ ، ــــــ

$|ق_٢ - ق_١| = |٣ - ٠| = ٣$

$|ق_٤ - ق_٣| = |٥ - ٢| = ٣$

ـــــ

$|ق_{ن+١} - ق_ن| = ٣$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب

$\therefore \; \forall$ هـ $\in ح^{++}$ ، $\exists$ $ن_١ \in ط$ بحيث اذا كان $ن > ن_١$ فان

$|ق_ن - ب| < هـ$

$|ق_{ن+١} - ق_ن| = |(ق_{ن+١} - ب) + (ب - ق_ن)| \leq |ق_{ن+١} - ب| + |ب - ق_ن|$

$< هـ + هـ = ٢هـ$

ليكن $هـ = \frac{1}{2}$

$\therefore \; |ق_{ن+١} - ق_ن| < ١$ وهذا تناقض لان $|ق_{ن+١} - ق_ن| = ٣$

$\therefore$ العبارة "المتتابعة $\langle ق_ن \rangle$ متقاربة وغايتها = ب" كاذبة

$\therefore$ العبارة "ليس للمتتابعة $ق_ن$ غاية" صادقة

(٦) $ق_١ = ١$ ، $ق_٢ = ٢$ ، $ق_٣ = ٦$ ، $ق_٤ = ٢٤$ ، ــــــ

$|ق_٢ - ق_١| = |٢ - ١| = ١$

$|ق_٤ - ق_٣| = |٢٤ - ٦| = ١٨$

ـــــ

$\therefore \; |ق_{ن+١} - ق_ن| \geq ١$

نفرض ان المتتابعة متقاربة وغايتها = ب حيث ب $\in$ ح

$\therefore \forall$ هـ $\in$ ح$^{++}$ ، $\exists$ $\text{ن}_1 \in$ ط بحيث اذا كان ن > ن_1 فان $|\text{ق}_{\text{ن}} - \text{ب}| <$ هـ

$$|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| = |(\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}) + (\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}})| \leq |\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ب}| + |\text{ب} - \text{ق}_{\text{ن}}|$$

$$< \text{هـ} + \text{هـ} = 2\,\text{هـ}$$

لكن هـ = $\frac{1}{2}$

$\therefore |\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| < \frac{1}{2}$ وهذا تناقض لان $|\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}| \geq 1$

$\therefore$ العبارة غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ = ب كاذبة .

$\therefore$ العبارة ليس للمتتابعة $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ غايةً عبارة صادقة

مثال ٥) باستخدام الملاحظات الواردة في ص ١٠٢ جد غاية كل من المتتابعات التالية

(١) $\left\langle \frac{-2\text{ن} + 3}{2\text{ن} + 1} \right\rangle$ ، (٢) $\left\langle \frac{\text{ن}^3 + 5\text{ن}^2 - 3\text{ن} + 7}{3\text{ن}^2 + 5\text{ن} - 6} \right\rangle$ (٣) $\left\langle \frac{\text{ن}^2 + 3\text{ن} - 7}{3\text{ن}^2 - 5\text{ن} + 3} \right\rangle$

(٤) $\left\langle \frac{-2}{\text{ن} - 1} \odot \frac{3 - 2\text{ن}}{3\text{ن}} \right\rangle$ (٥) $\left\langle \frac{\sqrt{2\text{ن}^2 + 3}}{2\text{ن} + 4} \right\rangle$

الحل/ (١) غا $\left\langle \frac{-2\text{ن} + 3}{2\text{ن} + 1} \right\rangle$ = غا $\left\langle \frac{-2 + \frac{3}{\text{ن}}}{2 + \frac{1}{\text{ن}}} \right\rangle$

$$= \frac{\text{غا} \left\langle -2 + \frac{3}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا} \left\langle 2 + \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle} = \frac{\text{غا} \langle -2 \rangle + \text{غا} \left\langle \frac{3}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا} \langle 2 \rangle + \text{غا} \left\langle \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle}$$

$$= \frac{\text{غا} \langle -2 \rangle + 3\,\text{غا} \left\langle \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا} \langle 2 \rangle + \text{غا} \left\langle \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle} = \frac{-2 + 3 \times \text{صفر}}{2 + \text{صفر}} = \frac{-2}{2} = -1$$

(٢) غا $\left\langle \frac{\sqrt{2\text{ن}^2 + 3}}{2\text{ن} + 4} \right\rangle$ = غا $\left\langle \frac{\frac{\sqrt{2\text{ن}^2 + 3}}{\text{ن}}}{\frac{2\text{ن} + 4}{\text{ن}}} \right\rangle$

$$= \text{غا} \left\langle \frac{\sqrt{\frac{2\text{ن}^2 + 3}{\text{ن}^2}}}{2 + \frac{4}{\text{ن}}} \right\rangle = \text{غا} \left\langle \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{\text{ن}^2}}}{2 + \frac{4}{\text{ن}}} \right\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{\text{غا} \left\langle 2 + \frac{3}{\text{ن}^2} \right\rangle}}{\text{غا} \left\langle 2 + \frac{4}{\text{ن}} \right\rangle} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{2 + 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\text{٣})\ \text{غا}\left\langle \frac{\text{ن}^{٣} + ٥\text{ن}^{٢} - ٣\text{ن} + ٢}{٦ - ٥\text{ن} + ٢\text{ن}^{٣}} \right\rangle = \text{غا}\left\langle \frac{١ + \frac{٥}{\text{ن}} - \frac{٣}{\text{ن}^{٢}} + \frac{٧}{\text{ن}^{٣}}}{\frac{٦}{\text{ن}^{٣}} - \frac{٥}{\text{ن}^{٢}} + ٢} \right\rangle$$

$$= \frac{\text{غا}\left\langle ١ + \frac{٥}{\text{ن}} - \frac{٣}{\text{ن}^{٢}} + \frac{٧}{\text{ن}^{٣}} \right\rangle}{\text{غا}\left\langle \frac{٦}{\text{ن}^{٣}} - \frac{٥}{\text{ن}^{٢}} + ٢ \right\rangle} = \frac{١ + \text{صفر} - \text{صفر} + \text{صفر}}{\text{صفر} - \text{صفر} + ٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(\text{٤})\ \text{غا}\left\langle \frac{\text{ن}^{٢} + ٣\text{ن} - ٧}{٣\text{ن}^{٢} - ٥\text{ن} + ٣} \right\rangle = \text{غا}\left\langle \frac{\frac{١}{\text{ن}} - \frac{٣}{\text{ن}^{٢}} - \frac{٧}{\text{ن}^{٣}}}{٣ - \frac{٥}{\text{ن}^{٢}} + \frac{٣}{\text{ن}^{٣}}} \right\rangle$$

$$= \frac{\text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ن}} \right\rangle - \text{غا}\left\langle \frac{٣}{\text{ن}^{٢}} \right\rangle - \text{غا}\left\langle \frac{٧}{\text{ن}^{٣}} \right\rangle}{\text{غا}\langle ٣ \rangle - \text{غا}\left\langle \frac{٥}{\text{ن}^{٢}} \right\rangle + \text{غا}\left\langle \frac{٣}{\text{ن}^{٣}} \right\rangle} = \frac{\text{صفر} - \text{صفر} - \text{صفر}}{٣ - \text{صفر} + \text{صفر}} = \text{صفر}$$

$$(\text{٥})\ \text{غا}\left\langle \frac{-٢}{\text{ن} + ١} \odot \frac{٣ - ٢\text{ن}}{٣\text{ن}} \right\rangle = \text{غا}\left\langle \frac{-٢}{\text{ن} + ١} \right\rangle \times \text{غا}\left\langle \frac{٣ - ٢\text{ن}}{٣\text{ن}} \right\rangle$$

$$= \text{غا}\left\langle \frac{-\frac{٢}{\text{ن}}}{١ + \frac{١}{\text{ن}}} \right\rangle \cdot \text{غا}\left\langle \frac{\frac{٣}{\text{ن}} - ٢}{٣} \right\rangle$$

$$= \frac{\text{غا}\left\langle -\frac{٢}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا}\langle ١ \rangle + \text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ن}} \right\rangle} \cdot \frac{\text{غا}\left\langle \frac{٣}{\text{ن}} - ٢ \right\rangle}{\text{غا}\langle ٣ \rangle} = \frac{-٢\,\text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ن}} \right\rangle}{\text{غا}\langle ١ \rangle + \text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ن}} \right\rangle} \cdot \frac{٣\,\text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ن}} \right\rangle - \text{غا}\langle ٢ \rangle}{\text{غا}\langle ٣ \rangle}$$

$$= \frac{-٢ \times \text{صفر}}{١ + \text{صفر}} \times \frac{٣ \times \text{صفر} - ٢}{٣} = \text{صفر} \times \frac{-٢}{٣} = \text{صفر}$$

مثال ٦) لتكن $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ متتابعة $\neq$ صفر $\forall$ ن

فاذا كانت غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle = \text{أ}$ ، أ $\neq$ صفر فان غا $\left\langle \frac{١}{\text{ق}_{\text{ن}}} \right\rangle = \frac{١}{\text{أ}}$

البرهان/ $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle \odot \left\langle \frac{١}{\text{ق}_{\text{ن}}} \right\rangle = \langle ١ \rangle$

$$\text{غا}\left\langle \text{ق}_{\text{ن}} \odot \frac{١}{\text{ق}_{\text{ن}}} \right\rangle = \text{غا}\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle \cdot \text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ق}_{\text{ن}}} \right\rangle = \text{غا}\langle ١ \rangle$$

$$\therefore\ \text{أ} \cdot \text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ق}_{\text{ن}}} \right\rangle = ١$$

$$\text{غا}\left\langle \frac{١}{\text{ق}_{\text{ن}}} \right\rangle = \frac{١}{١}$$

مثال ٧) ليكن ق : ح / {-½} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{\text{س} + ١}{٢\text{س} + ١}$

(١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق متناقص ∀ س ∈ ح / {-½}

(٣) جد غاية كل من المتتابعات التالية ان وجدت :-

(١) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle$ (٢) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} - \frac{٢}{\text{ن}}\right) \right\rangle$

(٣) $\left\langle \text{ق}\left(٢ + \frac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle$ (٤) $\left\langle \text{ق}\left(-٢ - \frac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle$

(٥) $\left\langle \text{ق}(٤) \right\rangle$ (٦) $\left\langle \text{ق}(-٢) \right\rangle$

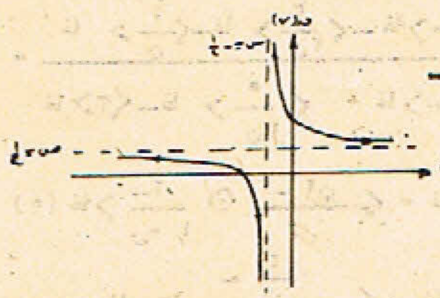
الحل/ بقسمة البسط على المقام ينتج

$$\text{ق}(\text{س}) = \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\text{س} + ٢}$$

س = -½ المستقيم المحاذي الشاقولي

ص = ½ المستقيم المحاذي الافقي

س	ص
٠	١
-١	٠



(شكل ٣-١)

٢) ∀ $\text{س}_١ \in$ ح / {-½} ، ∀ $\text{س}_٢ \in$ ح / {-½}

اذا كان $\text{س}_١ < \text{س}_٢ \Leftarrow ٤\text{س}_١ + ٢ < ٤\text{س}_٢ + ٢$

$$\Leftarrow \frac{١}{٤\text{س}_١ + ٢} > \frac{١}{٤\text{س}_٢ + ٢} \Leftarrow \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\text{س}_١ + ٢} > \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\text{س}_٢ + ٢}$$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}_١) > \text{ق}(\text{س}_٢)$ ∴ ق متناقص ∀ س ∈ ح / {-½}

٣) (١) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{١}{\text{ن}}\right) + ٢} \right\rangle =$

$$\left\langle \tfrac{1}{2} + \frac{١}{\frac{٤}{\text{ن}}} \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\text{ن} \right\rangle$$

ان هذه المتتابعة غير متقاربة

(٢) بنفس طريقة (١) $\left\langle \text{ق}\left(-\tfrac{1}{2} - \frac{٢}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \left\langle -\tfrac{1}{2} - \text{ن} \right\rangle$ غير متقاربة

(٣) $\left\langle \text{ق}\left(٢ + \frac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٤\left(٢ + \frac{١}{\text{ن}}\right) + ١} \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} + \frac{١}{٨ + \frac{٤}{\text{ن}} + ١} \right\rangle$

$$= \left\langle \frac{1}{9 + \frac{4}{\text{ن}}} + \tfrac{1}{2} \right\rangle \therefore \text{غا} \left\langle \text{ق}\left(2 + \frac{1}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

(٤) بنفس طريقة (٣)

(٥) غا $\langle \text{ق}(٤) \rangle = \text{غا} \left\langle \frac{٥}{٩} \right\rangle = \frac{٥}{٩}$

(٦) غا $\langle \text{ق}(-٢) \rangle = \text{غا} \left\langle \frac{-١}{-٣} \right\rangle = \frac{١}{٣}$.

مثال ٨) اذا كان كل من $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ ، $\langle \text{ل}_{\text{ن}} \rangle$ متابعة وكان

١) غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \odot \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \text{ب}$ حيث ب $\in$ ح فهل من الضروري ان يكون لكل من

$\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ ، $\langle \text{ل}_{\text{ن}} \rangle$ غاية ؟ برهن قولك

٢) اذا كان كل من $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ ، $\langle \text{ل}_{\text{ن}} \rangle$ متابعة بحيث $\text{ل}_{\text{ن}} \neq$ صفر $\forall$ ن

وكان غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \oplus\!\!\!\!\div\; \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \text{ب}$ ، حيث ب $\in$ ح فهل من

الضروري ان يكون لكل منهما غاية ؟ برهن قولك .

٣) اذا كان كل من $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ ، $\langle \text{ل}_{\text{ن}} \rangle$ متابعة وكان

غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \ominus \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \text{ب}$ ، حيث ب $\in$ ح فهل من الضروري ان يكون

لكل منهما غاية ؟ برهن قولك .

الحل / (١) لتكن $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle = \langle \text{ب ن} \rangle$ حيث ب $\in$ ح ولتكن $\langle \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \left\langle \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle$

ان $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \odot \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \left\langle \text{ب ن} \odot \frac{1}{\text{ن}} \right\rangle = \langle \text{ب} \rangle$

وان غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \odot \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \text{غا} \langle \text{ب} \rangle = \text{ب}$

من هذا المثال ان غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \odot \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \text{ب}$ في حين ان

$\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle$ ليس لها غايـة

$\therefore$ ليس من الضروري ان يكون لكل منهما غايـة .

٢) لتكن $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \rangle = \langle \text{ب ن} + (-1)^{\text{ن}} \rangle$ متابعة ليس لها غايـة

ولتكن $\langle \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \langle \text{ن} \rangle$ متابعة ليس لها غايـة

وان $\text{ل}_{\text{ن}} \neq$ صفر $\forall$ ن

لكن غا $\langle \text{ق}_{\text{ن}} \oplus\!\!\!\!\div\; \text{ل}_{\text{ن}} \rangle = \text{غا} \left\langle \frac{\text{ب ن} + (-1)^{\text{ن}}}{\text{ن}} \right\rangle$

$= \text{غا} \left\langle \text{ب} + \frac{(-1)^{\text{ن}}}{\text{ن}} \right\rangle = \text{ب}$

$\therefore$ ليس من الضروري ان يكون لكل منهما غايـة

٢) لتكن $\langle ق_ن \rangle = \langle ن + ٥ \rangle$ متتابعة ليس لها غايـة

ولتكن $\langle ل_ن \rangle = \langle ٥ - ب + ن \rangle$ متتابعة ليس لها غايـة

ولكن $\langle ق_ن \ominus ل_ن \rangle =$ غا $\langle ب \rangle = ب$

$\therefore$ ليس من الضروري ان يكون لكل منهما غايـة

تمارين

١) برهن باستخدام التعريف مايلي :ـ

أ) غا $\langle -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{2}$ ب) غا $\left\langle \frac{-٣\sqrt{ن}}{ن} \right\rangle =$ صفر

جـ) غا $\left\langle \frac{٣ن - ٢}{٢ن + ٨} \right\rangle = \frac{٣}{٢}$ د) غا $\left\langle \frac{٤ن + (-١)^ن}{٣ن} \right\rangle = \frac{٤}{٣}$

٢) برهن ان ليس للمتتابعات التالية غاية :ـ

أ) $\langle ن - ن^٢ \rangle$ ب) $\langle \frac{1}{2} + (-٢)^ن \rangle$

جـ) $\langle (-١)^ن \rangle$ د) $\left\langle \frac{(-٢)^ن + ٤}{ن} \right\rangle$

هـ) $ق_ن = \begin{cases} -ن + ١ & \text{اذا كان ن عددا طبيعيا فرديا} \\ ن + ٢ & \text{اذا كان ن عددا طبيعيا زوجيا موجبا} \end{cases}$

و) $ق_١ = ١$ ، $ق_{ن+١} = (٢ن + ١) \cdot ق_ن$

٣) جد غاية كل من المتتابعات التالية وبرهن قولك باستخدام الملاحظات الواردة فـي الفصل

(١) $\left\langle \frac{ن^٣ + ٣ن^٢ - \sqrt{ن} + ١}{\sqrt{٣ن^٣} + \sqrt[٣]{ن} + ٢ن^٤} \right\rangle$ ، (٢) $\left\langle \frac{\sqrt{ن} - ١}{\sqrt{٣ن} + ١} \right\rangle$ (٣) $\left\langle -٢ + \frac{(-١)^ن}{ن^٢} \right\rangle$

٤) اذا كانت $\langle ق_ن \rangle = \left\langle \frac{٣ن - ٢}{٤ن + ٣} \right\rangle$ فبرهن ان غا $\langle ق_ن \rangle = \frac{٣}{٤}$

ثم جد عددا طبيعيا $ن_١$ بحيث اذا كان $ن > ن_١$ فان $\left| ق_ن - \frac{٣}{٤} \right| < ٠٫٠٠١$